التفوق

فى الهندسة الفراغية

الفصل الدراسى الثانى

الصف الثالث الثانوى

أ / صابر عبدالرحيم محمود

٠١٢٢٢٦٢٠٠٢٤٤



سنتر نهدى
Center El Noda
للخدمات التعليمية
١٧ ش . أحمد شوقى . الأرقم

بسم الله الرحمن الرحيم

وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ
عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ



بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين .. والصلاة والسلام على أشرف المرسلين

أعزائي طلبة وطالبات الصف الثالث الثانوي

يسعدني أن أقدم لكم هذا الجهد المتواضع .. متمنيا لكم التفوق

والنجاح بإذن الله ...

دعاء بدء المذاكرة

اللهم إني أسألك فهم النبيين وحفظ المرسلين .. وإلهام الملائكة المقربين..اللهم اجعل لساني عامراً بذكرك وقلبي بخشيتك ..وجسدي بطاعتك .. إنك على كل شئ قدير

من طرق تقوية المذاكرة

- ✪ الفهم أولا يساعد على الحفظ والتخزين .
- ✪ استذكر موضوعات متكاملة .
- ✪ الترابط بين ما تستذكره وما لديك من معلومات يقوى الذاكرة.
- ✪ تصنيف المواد حسب الموضوعات وحسب البساطة والصعوبة يسهل المذاكرة
- ✪ الصحة بشكل عام عامل أساسي لتقوية الذاكرة .
- ✪ بعد صلاة الفجر من أفضل أوقات المذاكرة .
- ✪ الوضوء قبل المذاكرة والبدء بالقرآن .
- ✪ تخصيص مكان للمذاكرة بعيداً عن مكان النوم .
- ✪ الجلوس بحيث يكون الظهر مستقيم .
- ✪ أن يقع الضوء على الكتاب مباشرة .
- ✪ بعد مذاكرة المادة قم بمراجعة سريعة قبل تركها والانتقال إلى غيرها .

- ✪خطط يومك كل صباح بكتابة الأشياء التى يجب أن تعملها .
- ✪لا تقم بزيارة صديق إلا بعد أخذ موعد سابق للزيارة .
- ✪احتفظ دائماً بورقة وقلم لتسجيل الأفكار خلال أوقات الفراغ .
- ✪خطط أوقات الراحة وحاول أن تجعلها تتفق مع أوقات الصلاة .
- ✪استفد من وقت الفراغ بالقراءة أو بحفظ القرآن الكريم .
- ✪وفر كل المواد و التلخيصات اللازمة قبل أن تبدأ المذاكرة .

النظام الاحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد

•• تحديد موضع جسم فى الفراغ (نظام احداثى ثلاثى الابعاد) $ح^3$:

نفرض ثلاثة مستقيمات $\overleftrightarrow{س س'}$ ، $\overleftrightarrow{ص ص'}$ ، $\overleftrightarrow{ع ع'}$ فى الفراغ متقاطعة فى نقطة و ومتعامدة مثنى مثنى بحيث تكون نظام إحداثى متعامد حسب قاعدة اليد اليمنى الموضحة بالشكل المقابل

حيث تستخدم وضعية الأصابع الموضحة ليشير السبابة إلى الاتجاه الموجب لمحور س والوسطى إلى الاتجاه الموجب لمحور ص والابهام إلى الاتجاه الموجب لمحور ع فتتعين احداثيات النقطة أ فى الفراغ بالثلاثى المرتب

$أ(س_1 ، ص_1 ، ع_1) \in ح^3$

•• مستويات الاحداثيات:

① المستوى الاحداثى س ص:

يحوى جميع نقط الفراغ التى احداثياتها (س ، ص ، ٠) وتكون معادلته ع = صفر

② المستوى الاحداثى س ع:

يحوى جميع نقط الفراغ التى احداثياتها (س ، ٠ ، ع) وتكون معادلته ص = صفر

③ المستوى الاحداثى ص ع:

يحوى جميع نقط الفراغ التى احداثياتها (٠ ، ص ، ع) وتكون معادلته س = صفر

ملاحظة: معادلة المستوى الذى يحوى جميع نقط الفراغ التى على الصورة:

① (س ، ص ، أ) هى ع = أ
② (س ، أ ، ع) هى ص = أ
③ (أ ، ص ، ع) هى س = أ

حيث أ ثابت $\in$ ح

ملاحظات هامة:

① النقطة (س ، ٠ ، ٠) تقع على محور س
والنقطة (٠ ، ص ، ٠) تقع على محور ص
والنقطة (٠ ، ٠ ، ع) تقع على محور ع

② النقطة $أ(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ تبعد
(أ) $|س_1|$ وحدة طول عن المستوى ص ع
(ب) $|ص_1|$ وحدة طول عن المستوى س ع
(ج) $|ع_1|$ وحدة طول عن المستوى س ص

فمثلاً النقطة أ(٥ ، −٤ ، ٣) تبعد ٥ وحدات طول عن المستوى ص ع ، ٤ وحدات طول عن المستوى س ع ، ٣ وحدات طول عن المستوى س ص

③ بُعد النقطة (أ ، ب ، جـ) عن
(أ) المحور س = $\sqrt{ب^2 + جـ^2}$
(ب) المحور ص = $\sqrt{أ^2 + جـ^2}$
(ج) المحور ع = $\sqrt{أ^2 + ب^2}$

④ المستقيمان $\overleftrightarrow{س س}$ ، $\overleftrightarrow{ص ص}$ يعينان المستوى س ص

، المستقيمان $\overleftrightarrow{ص ص}$ ، $\overleftrightarrow{ع ع}$ يعينان المستوى ص ع

، المستقيمان $\overleftrightarrow{س س}$ ، $\overleftrightarrow{ع ع}$ يعينان المستوى س ع

⑤ معادلة محور س في الفراغ هي
ص = صفر ، ع = صفر

ومعادلة محور ص في الفراغ هي
س = صفر ، ع = صفر

ومعادلة محور ع في الفراغ هي
س = صفر ، ص = صفر

البعد بين نقطتين في الفراغ

اذا كانت أ = $(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ ، ب = $(س_2 ، ص_2 ، ع_2)$ فإن

$$أب = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2 + (ع_2 - ع_1)^2}$$

احداثيات منتصف قطعة مستقيمة

اذا كانت أ = $(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ ، ب $(س_2 ، ص_2 ، ع_2)$ فإن احداثيات نقطة جـ التي تقع في منتصف $\overline{أب}$ هي

$$جـ = \left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} ، \frac{ع_1 + ع_2}{2}\right)$$

ملاحظة: في △ أ ب جـ اذا كان

① $(أب)^2 = (ب جـ)^2 + (أ جـ)^2$
كان △ أ ب جـ قائم الزاوية

② $(أب)^2 > (ب جـ)^2 + (أ جـ)^2$
كان △ أ ب جـ منفرج الزاوية

③ $(أب)^2 < (ب جـ)^2 + (أ جـ)^2$
كان △ أ ب جـ حاد الزاوية

ملاحظة: لإثبات أن ثلاثة نقط أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة نثبت أن

① أكبر القطع طولاً يساوي مجموع طولي القطعتين الآخرتين

② $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{ب جـ} = \overrightarrow{و} = \vec{0}$

معادلة الكرة في الفراغ

الكرة هي مجموعة نقط الفراغ التي تبعد عن نقطة ثابتة (تعرف بمركز الكرة) بعداً ثابتاً (يعرف بطول نصف قطر الكرة)

ونفرض أن النقطة أ (س ، ص ، ع) تقع على سطح الكرة التي مركزها النقطة م (ل ، ك ، ن) وطول نصف قطرها نق فإن الصورة القياسية لمعادلة الكرة هي

$$(س - ل)^2 + (ص - ك)^2 + (ع - ن)^2 = نق^2$$

تذكر أن

.. مساحة سطح الكرة = $4 \pi نق^2$

.. حجم الكرة = $\frac{4}{3} \pi نق^3$

.. الصورة العامة لمعادلة الكرة :

سبق لنا دراسة معادلة الدائرة في المستوى $(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$ حيث (د ، هـ) مركز الدائرة ، نق طول نصف قطرها وكانت الصورة العامة لها هي $س^2 + ص^2 + 2ل س + 2ك ص + جـ = صفر$ ومنها كانت مركز الدائرة (−ل ، −ك) وطول نصف قطرها نق = $\sqrt{ل^2 + ك^2 - جـ}$

بالمثل يوجد أيضاً الصورة العامة لمعادلة الكرة في الفراغ والتي يمكن استنتاجها من الصورة القياسية الموضحة سابقاً فتكون الصورة العامة

$س^2 + ص^2 + ع^2 + 2ل س + 2ك ص + 2ن ع + د = صفر$ ومنها فإن مركز الكرة هو $(-ل ، -ك ، -ن)$ أي

$(\frac{-1}{2}$ معامل س ، $\frac{-1}{2}$ معامل ص ، $\frac{-1}{2}$ معامل ع$)$

وذلك بشرط أن معاملات كل من $س^2$ ، $ص^2$ ، $ع^2$ هو الواحد الصحيح ومنها أيضاً فإن طول نصف قطر الكرة

$$نق = \sqrt{ل^2 + ك^2 + ن^2 - د}$$

ملاحظات:

في المعادلة العامة للكرة يكون

- معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ = معامل $ع^2 \neq$ صفر
- $ل^2 + ك^2 + ن^2 - د > صفر$
- المعادلة خالية من الحد الذي يشمل س ص ، ص ع ، س ع

•• الكرة التي مركزها نقطة الأصل والنقطة (أ ، ب ، جـ) تقع عليها: يكون

① طول نصف قطرها $نق = \sqrt{أ^2 + ب^2 + جـ^2}$

② معادلتها في الصورة القياسية هي $س^2 + ص^2 + ع^2 = أ^2 + ب^2 + جـ^2$

•• الكرة التي يقع مركزها على أحد المحاور وتمس المستوى المار بالمحورين الآخرين:

① إذا كان المركز يقع على المحور س والكرة تمس المستوى ص ع فإن احداثيات المركز (أ ، 0 ، 0) وطول نصف القطر = |أ|

② إذا كان المركز يقع على المحور ص والكرة تمس المستوى س ع فإن احداثيات المركز (0 ، ب ، 0) وطول نصف القطر = |ب|

③ إذا كان المركز يقع على المحور ع والكرة تمس المستوى س ص فإن احداثيات المركز (0 ، 0 ، جـ) وطول نصف القطر = |جـ|

•• الكرة التي مركزها النقطة (أ ، ب ، جـ) وتمس مستويات الاحداثيات

① إذا كانت تمس المستوى س ص فإن طول نصف قطرها |جـ|

② إذا كانت تمس المستوى س ع فإن طول نصف قطرها |ب|

③ إذا كانت تمس المستوى ص ع فإن طول نصف قطرها |أ|

•• الكرة التي تمس مستويات الاحداثيات الموجبة وطول نصف قطرها نق: يكون مركزها النقطة (نق ، نق ، نق)

ملاحظة: إذا كانت $م_1$ ، $م_2$ كرتين طولا نصفي قطريهما $نق_1$ ، $نق_2$ على الترتيب حيث $نق_1 > نق_2$

إذا كانت الكرتان $م_1$ ، $م_2$	فإن
① متباعدتين	$م_1م_2 > نق_1 + نق_2$
② متماستين من الخارج	$م_1م_2 = نق_1 + نق_2$
③ متقاطعتين	$نق_1 - نق_2 < م_1م_2 < نق_1 + نق_2$
④ متماستين من الداخل	$م_1م_2 = نق_1 - نق_2$
⑤ إحداهما بداخل الأخرى	$م_1م_2 < نق_1 - نق_2$
⑥ متحدتي المركز	$م_1م_2 = صفر$

- أمثلة محلولة -

① أوجد احداثيات النقطة أ في كل من الحالات الآتية :

① أ (١ - ل ، ٢ل ، ٣ + ل) تقع في المستوى س ص

- الحل -

∴ ٣ + ل = صفر ∴ ل = -٣

∴ أ = (٤ ، -٦ ، ٠)

② أ (٠ ، م - ٣ ، م + ٤) تقع على المحور ع

- الحل -

∴ م - ٣ = صفر ∴ م = ٣

∴ أ = (٠ ، ٠ ، ٧)

③ أ (ن - ١ ، ن + ٤ ، ٥ن) تقع في المستوى ص = ٥

- الحل -

∴ ن + ٤ = ٥ ∴ ن = ١

∴ أ = (٠ ، ٥ ، ٥)

④ أ (ل + ٥ ، ٢ل ، ل) تبعد ٢$\sqrt{٥}$ وحدة طولية عن المحور س

- الحل -

∴ $\sqrt{(٢ل)^2 + ل^2}$ = ٢$\sqrt{٥}$ ∴ ٥ل^2 = ٢٠

∴ ل^2 = ٤ ∴ ل = ±٢

∴ أ = (٧ ، ٤ ، ٢) أو أ = (٣ ، -٤ ، -٢)

② أوجد البعد بين النقطتين أ ، ب في كل مما يأتي :

① أ (٧ ، ٠ ، ٤) ، ب (١ ، ٠ ، ٠)

- الحل -

أب = $\sqrt{(٧-١)^2 + (٠-٠)^2 + (٤-٠)^2}$ = ٢$\sqrt{١٣}$

② أ (١ ، ١ ، -٧) ، ب (-٢ ، -٣ ، -٧)

- الحل -

أب = $\sqrt{(١+٢)^2 + (١+٣)^2 + (-٧+٧)^2}$ = ٥

③ اثبت أن كل مجموعة من النقاط التالية تقع على استقامة واحدة

① أ (٧ ، ١ ، ٤) ، ب (٨ ، ٢ ، ٨) ، ج (١٠ ، ٤ ، ١٦)

- الحل -

الطريقة الأولى :

أب = $\sqrt{(-١)^2 + (-١)^2 + (-٤)^2}$ = ٣$\sqrt{٢}$

ب ج = $\sqrt{(-٢)^2 + (-٢)^2 + (-٨)^2}$ = ٦$\sqrt{٢}$

أ ج = $\sqrt{(-٣)^2 + (-٣)^2 + (-١٢)^2}$ = ٩$\sqrt{٢}$

∵ أ ج = أ ب + ب ج

∴ النقط أ ، ب ، ج على استقامة واحدة

الطريقة الثانية :

$\overrightarrow{أب}$ = ب - أ = (١ ، ١ ، ٤)

$\overrightarrow{ب ج}$ = ج - ب = (٢ ، ٢ ، ٨)

∴ $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{ب ج} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ١ & ٤ \\ ٢ & ٢ & ٨ \end{vmatrix}$

= (٨ - ٨) $\overrightarrow{س}$ - (٨ - ٨) $\overrightarrow{ص}$ + (٢ - ٢) $\overrightarrow{ع}$

= $\overrightarrow{٠}$

∴ النقط أ ، ب ، ج على استقامة واحدة

④ اثبت أن النقط أ(١، ٢، ٥)، ب(٢، ٥، ٣)، ج(-١، ٣، ٢) هي رؤوس مثلث متساوي الأضلاع وأوجد مساحته

- الحل -

$$\text{أب} = \sqrt{(1)^2+(3)^2+(-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$\text{ب ج} = \sqrt{(3)^2+(2)^2+(1)^2} = \sqrt{14}$$

$$\text{أ ج} = \sqrt{(2)^2+(-1)^2+(3)^2} = \sqrt{14}$$

∵ أب = ب ج = أ ج

∴ Δ أ ب ج متساوي الأضلاع

$$\therefore \text{مساحته} = \frac{1}{2} \times \sqrt{14} \times \sqrt{14} \text{ جا } 60$$

$$= \frac{7\sqrt{3}}{2} \text{ وحدة مربعة}$$

⑤ اثبت أن النقط أ، ب، ج هي رؤوس مثلث قائم الزاوية وأوجد مساحته حيث أ(٢، -١، ٣)، ب(-٤، ٤، ٢)، ج(-٢، ٥، ١)

- الحل -

$$\text{أب} = \sqrt{(6)^2+(-5)^2+(1)^2} = \sqrt{62}$$

$$\therefore (\text{أب})^2 = 62$$

$$\text{ب ج} = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\therefore (\text{ب ج})^2 = 6$$

$$\text{أ ج} = \sqrt{(4)^2+(-6)^2+(2)^2} = \sqrt{56}$$

$$\therefore (\text{أ ج})^2 = 56$$

$$\because (\text{أب})^2 = (\text{ب ج})^2 + (\text{أ ج})^2$$

∴ Δ أ ب ج قائم الزاوية في ج

$$\therefore \text{مساحته} = \frac{1}{2} \text{ أ ج} \times \text{ جب} = \frac{1}{2} \times \sqrt{56} \times \sqrt{6}$$

$$= 2\sqrt{21} \text{ وحدة مربعة}$$

⑥ اثبت أن المثلث الذي رؤوسه النقط أ(٧، ١، ٣)، ب(٥، ٣، ٤)، ج(٣، ٥، ٣) هو مثلث متساوي الساقين

- الحل -

$$\text{أب} = \sqrt{(2)^2+(-2)^2+(-1)^2} = 3$$

$$\text{أ ج} = \sqrt{(4)^2+(-4)^2+(0)^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{ب ج} = \sqrt{(2)^2+(-2)^2+(1)^2} = 3$$

∵ أب = ب ج

∴ Δ أ ب ج متساوي الساقين

⑦ اثبت أن النقط أ(٧، ١، ٣)، ب(٥، ٣، ل)، ج(٣، ٥، ٣) تكون مثلثاً متساوي الساقين لجميع قيم ل الحقيقية، ثم أوجد قيمة (قيم) ل التي تجعل المثلث متساوي الأضلاع

- الحل -

$$\text{أب} = \sqrt{(2)^2+(-2)^2+(3-\text{ل})^2} = \sqrt{8+(3-\text{ل})^2}$$

$$\text{ب ج} = \sqrt{(2)^2+(-2)^2+(\text{ل}-3)^2} = \sqrt{8+(\text{ل}-3)^2}$$

∵ أب = ب ج لجميع قيم ل

∴ Δ أ ب ج متساوي الساقين

$$\because \text{أ ج} = \sqrt{(4)^2+(-4)^2+(0)^2} = 4\sqrt{2}$$

ويكون Δ أ ب ج متساوي الأضلاع إذا كان

$$\sqrt{8+(\text{ل}-3)^2} = 4\sqrt{2} \quad \text{وبالتربيع}$$

$$\therefore 8+(\text{ل}-3)^2 = 32 \qquad \therefore (\text{ل}-3)^2 = 24$$

$$\therefore \text{ل}-3 = \pm 2\sqrt{6} \qquad \therefore \text{ل} = 3 \pm 2\sqrt{6}$$

⑧ أوجد احداثيات نقطة منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(١، -٣، ٢)، ب(٤، -١، ٤)

- الحل -

احداثيات نقطة منتصف $\overline{أب}$ هي

$$\left(\frac{١+٤}{٢} ، \frac{-٣-١}{٢} ، \frac{٢+٤}{٢}\right)$$

$$= \left(\frac{٥}{٢} ، -٢ ، ٣\right)$$

⑨ إذا كانت ج(٥، ٥، ٩) هي منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(٤، -١، ٣) أوجد ب

- الحل -

نفرض أن ب(س، ص، ع)

$$\therefore \left(\frac{٤+س}{٢} ، \frac{-١+ص}{٢} ، \frac{٣+ع}{٢}\right) = (٥، ٥، ٩)$$

$\therefore \frac{٤+س}{٢} = ٥$ $\therefore$ ٤ + س = ١٠

$\therefore$ س = ٦

$\therefore \frac{-١+ص}{٢} = ٥$ $\therefore$ -١ + ص = ١٠

$\therefore$ ص = ١١

$\therefore \frac{٣+ع}{٢} = ٩$ $\therefore$ ٣ + ع = ١٨

$\therefore$ ع = ١٥

$\therefore$ ب (٦، ١١، ١٥)

⑩ إذا كانت ج = (-١، ٦، -٥) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(ل-٢، -١، م+٣)، ب(٢، ن-٧، -٢) فأوجد قيمة ل + م - ن

- الحل -

$$\left(\frac{ل-٢+٢}{٢} ، \frac{-١+ن-٧}{٢} ، \frac{م+٣-٢}{٢}\right) = (-١، ٦، -٥)$$

$\therefore \frac{ل}{٢} = -١$ $\therefore$ ل = -٢

$\therefore \frac{ن-٨}{٢} = ٦$ $\therefore$ ن - ٨ = ١٢

$\therefore$ ن = ٢٠

$\therefore \frac{م+١}{٢} = -٥$ $\therefore$ م + ١ = -١٠

$\therefore$ م = -١١

$\therefore$ ل + م - ن = -٢ - ١١ - ٢٠ = -٣٣

⑪ إذا كانت أ ∈ محور س، ب ∈ ص، ج ∈ محور ع وكانت النقطة (١، -١، صفر) منتصف $\overline{أب}$، والنقطة (صفر، -١، ٢) منتصف $\overline{بج}$ أوجد احداثيات منتصف $\overline{أج}$

- الحل -

نفرض أن أ(س، ٠، ٠)، ب(٠، ص، ٠)، ج = (٠، ٠، ع)

$$\therefore \left(\frac{س}{٢} ، \frac{ص}{٢} ، ٠\right) = (١، -١، ٠)$$

$\therefore$ س = ٢، ص = -٢

$$\left(٠ ، \frac{ص}{٢} ، \frac{ع}{٢}\right) = (صفر، -١، ٢)$$

$\therefore$ ص = -٢، ع = ٤

$\therefore$ منتصف $\overline{أج}$ هو

$$\left(\frac{٢+٠}{٢} ، ٠ ، \frac{٠+٤}{٢}\right) = (١، ٠، ٢)$$

(١٢) اذا كانت أ ، ب ، جـ ، د أربعة نقط في مستوى واحد اثبت أن
أ(٥، -١، ١) ، ب(٧، -٤، ٧) ، جـ(١، -٦، ١٠) ، د(-١، -٣، ٤) هي رؤوس معين

- الحل -

أب $= \sqrt{(-٢)^2 + (٣)^2 + (-٦)^2} = ٧$

ب جـ $= \sqrt{(٦)^2 + (٢)^2 + (-٣)^2} = ٧$

جـ د $= \sqrt{(٢)^2 + (-٣)^2 + (٦)^2} = ٧$

أ د $= \sqrt{(٦)^2 + (٢)^2 + (-٣)^2} = ٧$

∴ أب = ب جـ = جـ د = د أ

∴ الشكل أ ب جـ د معين

(١٣) أوجد معادلة الكرة التي:

(١) مركزها النقطة (٢، -١، ٤) وطول نصف قطرها ٣ وحدات

- الحل -

$(س-٢)^2 + (ص+١)^2 + (ع-٤)^2 = ٩$

(٢) (٣، ٤، -٣) ، (٠، ٢، ١) نهايتا قطر فيها

- الحل -

$٢ نق = \sqrt{(٣)^2 + (٢)^2 + (-٤)^2} = \sqrt{٢٩}$

$∴ نق = \frac{\sqrt{٢٩}}{٢}$

ومركز الكرة هو $(\frac{٣}{٢}، ٣، -١)$

والمعادلة هي

$(س - \frac{٣}{٢})^2 + (ص-٣)^2 + (ع+١)^2 = \frac{٢٩}{٤}$

(٣) مركزها النقطة (١، -٦، ١) وتمر بالنقطة (٢، -١، ٥)

- الحل -

$نق = \sqrt{(-١)^2 + (-٥)^2 + (-٤)^2} = \sqrt{٤٢}$

∴ المعادلة هي $(س-١)^2 + (ص+٦)^2 + (ع-١)^2 = ٤٢$

(٤) مركزها النقطة (-٢، -٥، ٣) وتمس المستوى س ص

- الحل -

∵ الكرة تمس المستوى س ص ∴ نق = ٣

∴ المعادلة $(س+٢)^2 + (ص+٥)^2 + (ع-٣)^2 = ٩$

(٥) تكون متحدة المركز مع الكرة $س^2 + ص^2 + ع^2 - ٦س + ٢ص - ٤ع = ٢$ وطول نصف قطرها ضعف نصف قطر الكرة المعطاة

- الحل -

∴ مركزها نق = (٣، -١، ٢)

، $نق_1 = \sqrt{٩+١+٤+٢} = ٤$

$∴ نق_2 = ٢ \times ٤ = ٨$

∴ المعادلة $(س-٣)^2 + (ص+١)^2 + (ع-٢)^2 = ٦٤$

(٦) طول نصف قطرها ٣ وحدات وتمس مستويات الاحداثيات الموجبة

- الحل -

∴ مركزها (٣، ٣، ٣)

المعادلة $(س-٣)^2 + (ص-٣)^2 + (ع-٣)^2 = ٩$

(٧) يقع مركزها على المحور ع ويبعد ٣ وحدات عن المستوى الاحداثي س ص وطول نصف قطرها وحدتان طول

- الحل -

مركزها (٠، ٠، ٣) أو (٠، ٠، −٣)

، نق = ٢

∴ المعادلة س^2 + ص^2 + (ع − ٣)^2 = ٤ أو

س^2 + ص^2 + (ع + ٣)^2 = ٤

---

⑧ تمس مستوى إحداثي ومركزها هو (٣، صفر، صفر)

- الحل -

∵ النقطة على محور س

∴ تمس المستوى صع ∴ نق = ٣

∴ المعادلة (س − ٣)^2 + ص^2 + ع^2 = ٩

---

⑨ تمس المستوى الإحداثي صع ومركزها (−٣، ٣، ٤)

- الحل -

∴ نق = ٣ ∴ المعادلة هي

(س + ٣)^2 + (ص − ٣)^2 + (ع − ٤)^2 = ٩

---

⑩ مركزها (−٣، −٣، ٥) وتمس مستويات الإحداثيات سع، صع

- الحل -

∴ نق = |−٣| = ٣ ∴ المعادلة هي

(س + ٣)^2 + (ص + ٣)^2 + (ع − ٥)^2 = ٩

---

⑪ مركزها النقطة (٣، −٢، ٤) وتمس المستوى الإحداثي الذي معادلته ع = ٣

- الحل -

∴ نق = |٤ − ٣| = ١ ∴ المعادلة هي

(س − ٣)^2 + (ص + ٢)^2 + (ع − ٤)^2 = ١

---

⑫ تمر بالنقط أ(−٥، −٤، ١) ، ب(٣، ٤، −٥) ، جـ(٠، ٠، ٤) ، د(٠، ٠، ٠)

- الحل -

نفرض أن معادلة الكرة هي

س^2 + ص^2 + ع^2 + ٢ل س + ٢ك ص + ٢ن ع + جـ = صفر

∵ (٠، ٠، ٠) ∈ للكرة ∴ جـ = صفر

∵ (٠، ٠، ٤) ∈ للكرة ∴ ١٦ + ٨ن + ٠ = ٠

∴ ن = −٢

∵ (−٥، −٤، ١) ∈ للكرة

∴ ٢٥ + ١٦ + ١ − ١٠ل − ٨ك − ٤ = صفر

∴ ١٠ل + ٨ك = ٣٨ ÷ ٢

∴ ٥ل + ٤ك = ١٩ ①

∵ (٣، ٤، −٥) ∈ للكرة

∴ ٩ + ١٦ + ٢٥ + ٦ل + ٨ك + ٢٠ = صفر

∴ ٦ل + ٨ك = −٧٠ ÷ ٢

∴ ٣ل + ٤ك = −٣٥ ②

من ①، ② ينتج أن

ل = ٢٧ ، ك = −٢٩

∴ المعادلة هي

س^2 + ص^2 + ع^2 + ٥٤س − ٥٨ل + ٤ع = صفر

---

⑭ عين مركز وطول نصف قطر الكرة التي معادلتها:

① (س − ٣)^2 + (ص − ٥)^2 + (ع + ٢)^2 − ٢٥ = صفر

وأوجد حجمها

- الحل -

المركز هو (٣، ٥، −٢) ، نق = ٥

حجمها = $\frac{٤}{٣}$ π نق^3 = $\frac{٤}{٣}$ π × (٥)^3

= $\frac{٥٠٠}{٣}$ π وحدة حجم

(٢) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ١٨$

- الحل -

المركز (٠ ، ٠ ، ٠) $نق = \sqrt{١٨} = ٣\sqrt{٢}$

(٣) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٤س - ٢ص - ٦ع + ١١ = ٠$

- الحل -

المركز (−٢ ، ١ ، ٣)

، $نق = \sqrt{(-٢)^٢ + (١)^٢ + (٣)^٢ - ١١} = \sqrt{٣}$

(٤) $٣س^٢ + ٣ص^٢ + ٣ع^٢ - ٣س - ٩ص - ٦ع + ٣ =$ صفر ، وأوجد مساحة سطحها

- الحل -

بقسمة المعادلة ÷ ٣

∴ $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - س - ٣ص - ٢ع + ١ = ٠$

∴ المركز = $(\frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٢} ، ١)$

∴ $نق = \sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{٩}{٤} + ١ - ١} = \frac{\sqrt{١٠}}{٢}$

∴ المساحة $= ٤ط نق^٢ = ٤ط \times \frac{١٠}{٤}$

= ١٠ ط وحدة مساحة

(١٥) اذا كان

$(س-٢)^٢ + (ص+٤)^٢ + (ع-٢)^٢ = ١$ ،

$(س+٤)^٢ + (ص-٤)^٢ + (ع-٢)^٢ = ٤$

معادلتا كرتين أوجد البعد بين مركزي الكرتين وبين أن الكرتين غير متقاطعتين

- الحل -

$م_١ = (٢ ، -٤ ، ٢)$ ، $نق_١ = ١$

$م_٢ = (-٤ ، ٤ ، ٢)$ ، $نق_٢ = ٢$

∴ $م_١م_٢ = \sqrt{(٦)^٢ + (-٨)^٢ + (٠)^٢} = ١٠$

∵ $م_١م_٢ > نق_١ + نق_٢$

∴ الكرتان متباعدتان أي غير متقاطعتين

(١٦) اذا كانت الكرتان

$(س-١)^٢ + ص^٢ + (ع-٣)^٢ = ١٦$ ،

$(س+١)^٢ + (ص-٢)^٢ + (ع-ل)^٢ = ٢٥$

متماستين فأوجد قيمة ل

- الحل -

$م_١ = (١ ، ٠ ، ٣)$ ، $نق_١ = ٤$

$م_٢ = (-١ ، ٢ ، ل)$ ، $نق_٢ = ٥$

∴ $م_١م_٢ = \sqrt{(٢)^٢ + (-٢)^٢ + (٣-ل)^٢}$

∴ $م_١م_٢ = \sqrt{٨ + (٣-ل)^٢}$

في حالة التماس من الداخل

$م_١م_٢ = |نق_٢ - نق_١|$

∴ $\sqrt{٨ + (٣-ل)^٢} = ٥ - ٤ = ١$ بالتربيع

∴ $٨ + (٣-ل)^٢ = ١$ ∴ $(٣-ل)^٢ = -٧$

مرفوض

في حالة التماس من الخارج

$م_١م_٢ = نق_٢ + نق_١$

∴ $\sqrt{٨ + (٣-ل)^٢} = ٥ + ٤ = ٩$ بالتربيع

∴ $٨ + (٣-ل)^٢ = ٨١$

∴ $(٣-ل)^٢ = ٨١ - ٨ = ٧٣$

∴ $٣ - ل = \pm \sqrt{٧٣}$

∴ $ل = ٣ \pm \sqrt{٧٣}$

(١٧) اذا قطع المحور س الكرة $(س-٢)^2 + (ص+٣)^2 + (ع-١)^2 = ١٤$ في النقطتين أ ، ب أوجد طول $\overline{أب}$

- الحل -

نوجد نقطة تقاطع المحور س مع الكرة ، المحور س معادلته

ص = صفر ، ع = صفر

$\therefore (س-٢)^2 + ٩ + ١ = ١٤$

$\therefore (س-٢)^2 = ٤$

$\therefore س - ٢ = \pm ٢$

$\therefore$ س = صفر ، ٤

$\therefore$ النقط هي أ(٠، ٠، ٠)

، ب(٤، ٠، ٠)

$\therefore$ طول أب $= \sqrt{(٤)^2 + (٠)^2 + (٠)^2} = ٤$

(١٨) أوجد معادلة الكرة التي يقع مركزها على المحور ص والتي تمر بالنقطتين (١، ٣، ٢) ، (-٢، ٤، ٢)

- الحل -

نفرض المركز هو (٠، ب، ٠)

$\therefore$ المركز يبعد مسافات متساوية عن النقط المعطاة

$\therefore \sqrt{١^2 + (٣-ب)^2 + ٢^2} = \sqrt{(-٢)^2 + (٤-ب)^2 + ٢^2}$

$\therefore ٥ + (٣-ب)^2 = ٨ + (٤-ب)^2$

$\therefore ٥ + ٩ - ٦ب + ب^2 = ٨ + ١٦ - ٨ب + ب^2$

$\therefore ١٤ - ٦ب + ب^2 = ٢٤ - ٨ب + ب^2$

$\therefore ١٤ - ٦ب = ٢٤ - ٨ب$

$\therefore ٨ب - ٦ب = ٢٤ - ١٤$

$\therefore ٢ب = ١٠$ $\therefore$ ب = ٥

$\therefore$ المركز (٠، ٥، ٠) ، $نق = \sqrt{١^2 + (-٢)^2 + ٢^2}$

$\therefore$ نق = ٣ $\therefore س^2 + (ص-٥)^2 + ع^2 = ٩$

(١٩) أوجد معادلة الكرة التي يقع مركزها في المستوى س ع والتي تمر بالنقاط أ(٠، ٨، ٠) ، ب(٤، ٦، ٢) ، ج(٠، ١٢، ٤)

- الحل -

نفرض أن المركز = (-ل، ٠، -ن)

حيث ك = صفر "يقع في المستوى س ع"

ونفرض أن المعادلة هي

$س^2 + ص^2 + ع^2 + ٢ل س + ٢ك ص + ٢ن ع + جـ$ = صفر

$\because$ أ(٠، ٨، ٠) $\in$ للكرة

$\therefore$ ٦٤ + جـ = صفر $\therefore$ جـ = -٦٤

$\because$ ج(٠، ١٢، ٤) $\in$ للكرة

$\therefore$ صفر + ١٤٤ + ١٦ + ٨ن - ٦٤ = صفر

$\therefore$ ن = -١٢

$\because$ ب(٤، ٦، ٢) $\in$ للكرة

$\therefore$ ١٦ + ٣٦ + ٤ + ٨ل + ٤ن - ٦٤ = صفر

$\therefore$ ٢ل + ن = ٢ $\therefore$ ن = -١٢

$\therefore$ ٢ل - ١٢ = ٢ $\therefore$ ٢ل = ١٤ $\therefore$ ل = ٧

$\therefore$ المعادلة هي

$س^2 + ص^2 + ع^2 + ١٤س - ٢٤ع - ٦٤$ = صفر

(٢٠) كرة مركزها (ل-٢، م+١، ٤) ونصف قطرها ٣ وحدات تمس المستويين س ع ، ص ع أوجد قيم كل من ل ، م

- الحل -

$\because$ الكرة تمس س ع ونصف قطرها ٣

$\therefore |م+١| = ٣$ $\therefore$ م + ١ = ٣

$\therefore$ م = ٢ ، م + ١ = -٣ $\therefore$ م = -٤

$\because$ الكرة تمس ص ع ونصف قطرها ٣

$\therefore |ل-٢| = ٣$ $\therefore$ ل - ٢ = ٣

$\therefore$ ل = ٥ ، ل - ٢ = -٣ $\therefore$ ل = -١

- تمارين عامة -

① أوجد البعد بين النقطتين أ ، ب حيث أ(٤ ، ١ ، ٩) ، ب(٢ ، ١ ، ٦)

② اثبت أن النقط أ(٢ ، -١ ، ٥) ، ب(٦ ، ٠ ، ٦) ، جـ(١٤ ، ٢ ، ٨) تقع على استقامة واحدة

③ اثبت أن النقط أ ، ب ، جـ هي رؤوس مثلث قائم الزاوية حيث أ(٠ ، ٠ ، ٠) ، ب(٤ ، -٥ ، ٢) ، جـ(١ ، ٢ ، ٣) وأوجد مساحته

④ أوجد إحداثيات نقطة منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(-٣ ، ٥ ، ٥) ، ب(-٦ ، ٤ ، ٨)

⑤ إذا كانت جـ(-١ ، ٤ ، ٠) منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ حيث ب(٤ ، -٢ ، ١) أوجد إحداثيات أ

⑥ أوجد محيط المثلث الناتج من توصيل منتصفات أضلاع △ أ ب جـ حيث أ(٢ ، ٥ ، -١) ، ب(٦ ، -٣ ، ٣) ، جـ(-٤ ، ٧ ، ١)

⑦ إذا كان أ ، ب ، جـ ، د أربعة نقط في مستوى واحد اثبت أن أ(٠ ، ٤ ، ١) ، ب(٢ ، ٣ ، -١) ، جـ(٤ ، ٥ ، ٠) ، د(٢ ، ٦ ، ٢) هي رؤوس مربع

⑧ أوجد معادلة الكرة التي :-

① مركزها (٤ ، -٢ ، ٣) وطول قطرها ٢√٥

② أ(٢ ، ٣ ، -٥) ، ب(-٤ ، -١ ، ٣) طرفا قطر فيها

③ مركزها النقطة (-١ ، ٢ ، -٢) وتمر بنقطة الأصل

④ مركزها النقطة (٠ ، ٤ ، ٠) وتمس المستوى الإحداثي س ع

⑤ تمس مستويات الإحداثيات الموجبة وطول قطرها ١٦ وحدة

⑥ مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (-١ ، -٢ ، ٢)

⑨ إذا كان $\overline{أب}$ قطر في الكرة التي معادلتها س² + ص² + ع² − ٤س + ٢ص − ٦ع − ٦٧ = صفر حيث أ(-٦ ، ٣ ، ٢) أوجد إحداثيات نقطة ب

⑩ متى تمثل المعادلة
س² + ص² + ع² + أ س + ب ص + جـ ع − د = صفر
معادلة كرة حيث أ ، ب ، جـ ، د ∈ ح



المتجهات فى الفراغ

• **القطعة المستقيمة الموجهة:**

تتحدد القطعة المستقيمة الموجهة بثلاثة عناصر وهى:

① نقطة البداية ② نقطة النهاية

③ الاتجاه من نقطة البداية إلى نقطة النهاية

فمثلاً القطعة المستقيمة الموجهة من أ إلى ب يرمز لها بالرمز $\overrightarrow{\text{أب}}$ حيث

أ $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1 ، \text{ع}_1)$ نقطة البداية ،

ب $(\text{س}_2 ، \text{ص}_2 ، \text{ع}_2)$ نقطة النهاية ،

اتجاهها هو اتجاه $\overrightarrow{\text{أب}}$ ومعيارها $\|\overrightarrow{\text{أب}}\|$ يعرف بطول $\overline{\text{أب}}$

• **متجه الموضع فى الفراغ:**

يتحدد موضع أى نقطة أ $(\text{أ}_\text{س} ، \text{أ}_\text{ص} ، \text{أ}_\text{ع})$ فى الفراغ بالنسبة لنقطة الأصل و(٠، ٠، ٠) بالقطعة المستقيمة الموجهة التى بدايتها نقطة الأصل ونهايتها النقطة أ واتجاهها $\overrightarrow{\text{وأ}}$

• **معيار المتجه:** هو طول القطعة المستقيمة الموجهة التى تمثل المتجه أى أن

$$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{\text{أ}_\text{س}^2 + \text{أ}_\text{ص}^2 + \text{أ}_\text{ع}^2}$$

• **جمع المتجهات فى الفراغ:**

اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (-2 ، 3 ، 5)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (4 ، -3 ، 2)$ فإن

$\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} = (-2 ، 3 ، 5) + (4 ، -3 ، 2)$

$= (2 ، \text{صفر} ، 7)$

• **خواص عملية جمع المتجهات فى الفراغ:**

① خاصية الانغلاق: لكل $\overrightarrow{\text{أ}} ، \overrightarrow{\text{ب}} \in \text{ح}^3$ يكون $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} \in \text{ح}^3$

② خاصية الابدال $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}}$

③ خاصية الدمج أو التجميع

$\overrightarrow{\text{أ}} + (\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}}) = (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) + \overrightarrow{\text{جـ}}$

$= \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}}$

④ خاصية وجود العنصر المحايد: لأى متجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ يوجد متجه صفرى $\overrightarrow{\text{و}} = (0 ، 0 ، 0)$

حيث $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{و}} = \overrightarrow{\text{و}} + \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{أ}}$

⑤ خاصية توفر المعكوسات الجمعية

لكل $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_\text{س} ، \text{أ}_\text{ص} ، \text{أ}_\text{ع})$ يوجد متجه $-\overrightarrow{\text{أ}} = (-\text{أ}_\text{س} ، -\text{أ}_\text{ص} ، -\text{أ}_\text{ع})$ حيث

$\overrightarrow{\text{أ}} + (-\overrightarrow{\text{أ}}) = \overrightarrow{\text{و}}$

⑥ خاصية الحذف: اذا كان

$\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{جـ}}$ فإن $\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{جـ}}$

ملاحظة: اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} ، \overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين فى الفراغ ثلاثى الأبعاد فإن

$$\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}\| \le \|\overrightarrow{\text{أ}}\| + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|$$

• **ضرب المتجه فى عدد حقيقى:**

اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_\text{س} ، \text{أ}_\text{ص} ، \text{أ}_\text{ع}) \in \text{ح}^3$ وكان $\text{ك} \in \text{ح}$ فإن

$\text{ك}\overrightarrow{\text{أ}} = \text{ك}(\text{أ}_\text{س} ، \text{أ}_\text{ص} ، \text{أ}_\text{ع})$

$= (\text{ك أ}_\text{س} ، \text{ك أ}_\text{ص} ، \text{ك أ}_\text{ع})$

• **خواص ضرب المتجهات فى عدد حقيقى:**

① خاصية التوزيع

$\text{ك}(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) = \text{ك}\overrightarrow{\text{أ}} + \text{ك}\overrightarrow{\text{ب}}$

$(\text{ك} + \text{ل})\overrightarrow{\text{أ}} = \text{ك}\overrightarrow{\text{أ}} + \text{ل}\overrightarrow{\text{أ}}$

② خاصية الدمج (التجميع)

$\text{ك}(\text{ل}\overrightarrow{\text{أ}}) = (\text{ك ل})\overrightarrow{\text{أ}} = \text{ك ل}\overrightarrow{\text{أ}}$

③ خاصية الحذف

اذا كان $\text{ك}\overrightarrow{\text{أ}} = \text{ك}\overrightarrow{\text{ب}}$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{ب}}$

ملاحظة:

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين في الفراغ ، م عدد حقيقي $\neq$ صفر وكان

$\|\overrightarrow{ب}\| = \|م\overrightarrow{أ}\|$ فإن

$\|\overrightarrow{ب}\| = |م| \cdot \|\overrightarrow{أ}\|$

مثال: إذا كان $\|\overrightarrow{ب}\| = \|-3\overrightarrow{أ}\|$

فإن $\|\overrightarrow{ب}\| = 3\|\overrightarrow{أ}\|$

أو $\|\overrightarrow{ب}\| = \|5\overrightarrow{أ}\|$ فإن

$\|\overrightarrow{ب}\| = 5\|\overrightarrow{أ}\|$

• تساوي المتجهات في الفراغ:

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ،

$\overrightarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ فإن

$\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$ إذا وفقط إذا كان

$أ_س = ب_س$ ، $أ_ص = ب_ص$ ، $أ_ع = ب_ع$

• متجه الوحدة: هو المتجه الذي معياره وحدة الأطوال

• متجهات الوحدة الأساسية:

① متجه الوحدة الأساسي $\overrightarrow{س}$ هو متجه الموضع للنقطة (1، 0، 0) ومعياره الوحدة واتجاهه هو الاتجاه الموجب لمحور س

② متجه الوحدة الأساسي $\overrightarrow{ص}$ هو متجه الموضع للنقطة (0، 1، 0) ومعياره الوحدة واتجاهه هو الاتجاه الموجب لمحور ص

③ متجه الوحدة الأساسي $\overrightarrow{ع}$ هو متجه الموضع للنقطة (0، 0، 1) ومعياره الوحدة واتجاهه هو الاتجاه الموجب لمحور ع

لاحظ أن $\|\overrightarrow{س}\| = \|\overrightarrow{ص}\| = \|\overrightarrow{ع}\| = 1$

• التعبير عن أي متجه بدلالة متجهات الوحدة الأساسية:

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ متجه في الفراغ ثلاثي الأبعاد حيث $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$

$\therefore \overrightarrow{أ} = أ_س \overrightarrow{س} + أ_ص \overrightarrow{ص} + أ_ع \overrightarrow{ع}$

• التعبير عن قطعة مستقيمة موجهة في الفراغ بدلالة متجهي الموضع لطرفيها

$$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$$

• متجه الوحدة في اتجاه معلوم:

متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{أ}$ يرمز له بالرمز $\overrightarrow{و}_أ$ حيث

$$\overrightarrow{و}_أ = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|}$$

• زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه لمتجه في الفراغ

★ زوايا الاتجاه لمتجه $\overrightarrow{أ}$ في الفراغ هي قياسات الزوايا $(\theta_س ، \theta_ص ، \theta_ع)$ التي يصنعها المتجه مع الاتجاهات الموجبة للمحاور س ، ص ، ع على الترتيب

★ جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ في الفراغ هي جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ أي (جتا $\theta_س$ ، جتا $\theta_ص$ ، جتا $\theta_ع$)

$\therefore \overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_س \overrightarrow{س} + \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_ص \overrightarrow{ص} + \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_ع \overrightarrow{ع}$

∵ $\vec{A} = \|\vec{A}\|$ (حتا $\theta_{س}$ $\vec{س}$ + حتا $\theta_{ص}$ $\vec{ص}$ + حتا $\theta_{ع}$ $\vec{ع}$)

∴ $\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$ = حتا $\theta_{س}$ $\vec{س}$ + حتا $\theta_{ص}$ $\vec{ص}$ + حتا $\theta_{ع}$ $\vec{ع}$

، ∵ $\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$ هو متجه وحدة في اتجاه $\vec{A}$

∴ حتا $\theta_{س}$ $\vec{س}$ + حتا $\theta_{ص}$ $\vec{ص}$ + حتا $\theta_{ع}$ $\vec{ع}$

هو متجه وحدة في اتجاه $\vec{A}$

∴ حتا² $\theta_{س}$ + حتا² $\theta_{ص}$ + حتا² $\theta_{ع}$ = 1

ملاحظات:

① زوايا الاتجاه لمتجه $\vec{أب}$ (لا يمر بنقطة الأصل) في الفراغ هي قياسات الزوايا التي يصنعها متجه يمر بنقطة الأصل موازياً لمتجه $\vec{أب}$

② جيوب تمام الاتجاه لأي متجه هي مركبات متجه الوحدة في اتجاهه أي هي

$$\left(\frac{A_{س}}{\|\vec{A}\|} ، \frac{A_{ص}}{\|\vec{A}\|} ، \frac{A_{ع}}{\|\vec{A}\|}\right)$$

③ جيوب تمام الاتجاه الموجب للمحاور س ، ص ، ع أو أي متجه في اتجاه أي منهما هي (1 ، 0 ، 0) ، (0 ، 1 ، 0) ، (0 ، 0 ، 1) على الترتيب

④ زوايا اتجاه المحاور س ، ص ، ع الموجبة أو أي متجه في اتجاه أي منها هي (0° ، 90° ، 90°) ، (90° ، 0° ، 90°) ، (90° ، 90° ، 0°) على الترتيب

⑤ اذا كانت ($\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$) هي زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{A}$ فإن ($\pi - \theta_{س}$ ، $\pi - \theta_{ص}$ ، $\pi - \theta_{ع}$) هي زوايا الاتجاه للمتجه ($-\vec{A}$)

⑥ اذا كان المتجه $\vec{A}$ يصنع زوايا متساوية مع محاور الاحداثيات أي أن

$\theta_{س} = \theta_{ص} = \theta_{ع} = \theta$ فإن

حتا $\theta_{س}$ = حتا $\theta_{ص}$ = حتا $\theta_{ع}$ = حتا θ

∵ حتا² θ + حتا² θ + حتا² θ = 1

∴ 3 حتا² θ = 1 ∴ حتا² θ = $\frac{1}{3}$

∴ حتا θ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ومنها θ = 54° 44' 8"

، حتا θ = $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ ومنها θ = 125° 15' 52"

- أمثلة محلولة -

① عبر عن المتجهات (-1 ، 0 ، 0) ، (0 ، -1 ، 0) ، (0 ، 0 ، -1) بدلالة متجهات الوحدة الأساسية

- الحل -

(-1 ، 0 ، 0) = $-\vec{س}$

(0 ، -1 ، 0) = $-\vec{ص}$

(0 ، 0 ، -1) = $-\vec{ع}$

② أوجد معيار كل من المتجهات الآتية

① $\vec{A}$ = (2 ، -1 ، 0)

- الحل -

$\|\vec{A}\| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (0)^2} = \sqrt{5}$

② ب = ٥ س − ٤ ص + ٢√٣ ع

— الحل —

||ب|| = √((٥)² + (−٤)² + (٢√٣)²) = ٧

③ جـ = ع

— الحل —

||جـ|| = √((٠)² + (٠)² + (١)²) = ١

③ اذا كان أ = (٢، −٣، ١)، ب = (٤، −٢، ٠)، جـ = (−٦، ٠، ٣)

أوجد كلاً من المتجهات الآتية

① أ + ب ② ٣أ − ١/٣ جـ

③ ٣/٢ ب + ٢/٣ جـ

— الحل —

① أ + ب = (٢، −٣، ١) + (٤، −٢، ٠)

= (٦، −٥، ١)

② ٣أ − ١/٣ جـ = ٣(٢، −٣، ١) − ١/٣(−٦، ٠، ٣)

= (٦، −٩، ٣) − (−٢، ٠، ١)

= (٨، −٩، ٢)

③ ٣/٢ ب + ٢/٣ جـ = ٣/٢(٤، −٢، ٠) + ٢/٣(−٦، ٠، ٣)

= (٦، −٣، ٠) + (−٤، ٠، ٢)

= (٢، −٣، ٢)

④ اذا كان جـ = (٢، −٣، ١)، د = (٠، ٢، −٢)

① أوجد ٥جـ − ٢د

② اذا كان ٣أ − ٤د = جـ فأوجد أ

— الحل —

① ٥جـ − ٢د = ٥(٢، −٣، ١) − ٢(٠، ٢، −٢)

= (١٠، −١٥، ٥) − (٠، ٤، −٤)

= (١٠، −١٩، ٩)

② ∵ ٣أ − ٤د = جـ

∴ ٣أ = جـ + ٤د

∴ ٣أ = (٢، −٣، ١) + ٤(٠، ٢، −٢)

∴ ٣أ = (٢، −٣، ١) + (٠، ٨، −٨)

∴ ٣أ = (٢، ٥، −٧)

∴ أ = (٢/٣، ٥/٣، −٧/٣)

⑤ اذا كان (٣ل + ٢، ٩، م − ٤) = (−٤، ن²، ١٤)

فأوجد قيمة ل، م، ن

— الحل —

∵ ٣ل + ٢ = −٤ ∴ ٣ل = −٦

∴ ل = −٢

∵ ن² = ٩ ∴ ن = ±٣

∵ م − ٤ = ١٤ ∴ م = ١٨

⑥ أوجد قيم ل، م، ن فى كل مما يأتى

① ٢(٣، م، ل) + ٣(ن، −٢، ٤) = (٣، ٢، ٤)

— الحل —

∴ (٦، ٢م، ٢ل) + (٣ن، −٦، ١٢) = (٣، ٢، ٤)

∴ ٦ + ٣ن = ٣ ∴ ٣ن = −٣ ∴ ن = −١

∴ ٢م − ٦ = ٢ ∴ ٢م = ٨ ∴ م = ٤

∴ ٢ل + ١٢ = ٤ ∴ ٢ل = −٨ ∴ ل = −٤

② ل(−٢، ٣، ١) + م(−٢، ١، ٢) + ن ع = (−٨، ٥، ٨)

— الحل —

∴ −٢ل − ٢م + ٠ = −٨ ∴ ٢ل + ٢م = ٨ ①

∴ ٣ل + م + ٠ = ٥ ∴ ٣ل + م = ٥ ②

∴ ل + ٢م + ن = ٨ ③

وبحل المعادلتين ①، ② ينتج أن

ل = ١ ، م = ٢

وبالتعويض في ③ ينتج أن ن = ٣

⑦ إذا كان أ = (٤، ٣، ٢)، ب = (-٢، ٥، -١)، ج = (٨، ١٩، ٤)

أوجد ج بدلالة أ، ب

- الحل -

نفرض أن ج = ل أ + م ب

∴ (٨، ١٩، ٤) = ل(٤، ٣، ٢) + م(-٢، ٥، -١)

∴ ٤ل - ٢م = ٨ ①

∴ ٣ل + ٥م = ١٩ ②

∴ ٢ل - م = ٤ ③

بحل المعادلتين ①، ② فإن

ل = ٣ ، م = ٢ (تحقق العلاقة ٣)

∴ ج = ٣أ + ٢ب

⑧ إذا كان أ = -٣ص - ع + ٥س ، ب = -٢ع + ٣س أوجد:

① ٣أ - ٥ب ② ||أ - ب||

- الحل -

① ٣أ - ٥ب = ٣(٥، -٣، -١) - ٥(٣، ٠، -٢)

= (١٥، -٩، -٣) - (١٥، ٠، -١٠)

= (صفر، -٩، ٧)

② أ - ب = (٥، -٣، -١) - (٣، ٠، -٢)

= (٢، -٣، ١)

∴ ||أ - ب|| = $\sqrt{٢^2 + (-٣)^2 + (١)^2}$ = $\sqrt{١٤}$

⑨ إذا كان أ(-١، ٤، ٦)، ب(٣، ٥، -١)

أوجد ||أب||

- الحل -

أب = ب - أ = (٣، ٥، -١) - (-١، ٤، ٦)

= (٣، ١، -٧)

∴ ||أب|| = $\sqrt{٩ + ١ + ٤٩}$ = $\sqrt{٥٩}$

⑩ إذا كان ل||٤أ|| = ||-٣أ|| أوجد قيمة ل حيث أ متجه في الفراغ الثلاثي ، ل ∈ ح*

- الحل -

∴ ٤ل ||أ|| = ٣ ||أ||

∴ ٤ل = ٣ ∴ ل = ٣/٤

⑪ إذا كان ||-٨أ|| = ٥||ل أ|| أوجد قيمة ل حيث أ متجه في الفراغ الثلاثي ، ل ∈ ح*

- الحل -

∴ ٨ ||أ|| = ٥ |ل| ||أ||

∴ ٨ = ٥ |ل| ∴ |ل| = ٨/٥

∴ ل = ± ٨/٥

⑫ إذا كان أ = (ل، ٠، ٠)، س = (١، ٠، ٠) اثبت أن

||أ|| = |ل| ||س||

- الحل -

الطرف الأيمن ||أ|| = $\sqrt{ل^2 + ٠ + ٠}$ = |ل|

الطرف الأيسر = |ل| ||س||

= |ل| × $\sqrt{١^2 + ٠^2 + ٠^2}$ = |ل|

∴ الطرفان متساويان

(١٣) اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + $\overrightarrow{\text{ع}}$ ،
$\overrightarrow{\text{ب}}$ = − $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ أوجد:

① ٢ $\overrightarrow{\text{أ}}$ − ٣ $\overrightarrow{\text{ب}}$

② ‖ $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ ‖ ، ‖ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ‖ + ‖ $\overrightarrow{\text{ب}}$ ‖

وماذا تستنتج

- الحل -

① ٢ $\overrightarrow{\text{أ}}$ − ٣ $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٢(٢، −٣، ١) − ٣(−١، −٢، ٠)

= (٤، −٦، ٢) − (−٣، −٦، ٠)

= (٧، صفر، ٢)

② $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢، −٣، ١) + (−١، −٢، ٠)

= (١، −٥، ١)

∴ ‖ $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ ‖ = $\sqrt{١+٢٥+١}$ = $\sqrt{٢٧}$

= ٣ $\sqrt{٣}$ = ٥٫١٩٦

‖ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ‖ + ‖ $\overrightarrow{\text{ب}}$ ‖ = $\sqrt{٤+٩+١}$ + $\sqrt{١+٤}$

= $\sqrt{١٤}$ + $\sqrt{٥}$ = ٥٫٩٨

نلاحظ أن ‖ $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ ‖ < ‖ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ‖ + ‖ $\overrightarrow{\text{ب}}$ ‖

(١٤) أوجد متجه الوحدة في اتجاه كل من المتجهات الآتية:

① $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٨، −٤، −٨)

- الحل -

$\overrightarrow{\text{ى}}_{\text{أ}}$ = $\frac{\overrightarrow{\text{أ}}}{‖\overrightarrow{\text{أ}}‖}$ = $\frac{(٨، −٤، −٨)}{\sqrt{٦٤+١٦+٦٤}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ى}}_{\text{أ}}$ = $\frac{(٨، −٤، −٨)}{١٢}$ = ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{−١}{٣}$ ، $\frac{−٢}{٣}$)

② $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ − $\overrightarrow{\text{ع}}$ = (١، −٢، −١)

∴ $\overrightarrow{\text{ى}}_{\text{ب}}$ = $\frac{\overrightarrow{\text{ب}}}{‖\overrightarrow{\text{ب}}‖}$ = $\frac{(١، −٢، −١)}{\sqrt{١+٤+١}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ى}}_{\text{ب}}$ = $\frac{(١، −٢، −١)}{\sqrt{٦}}$ = ($\frac{١}{\sqrt{٦}}$ ، $\frac{−٢}{\sqrt{٦}}$ ، $\frac{−١}{\sqrt{٦}}$)

(١٥) اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (−١، ٣، ٢) ،
$\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٤، ٢، −١) أوجد متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب أ}}$

- الحل -

$\overrightarrow{\text{أب}}$ = ب − أ = (٤، ٢، −١) − (−١، ٣، ٢)

= (٥، −١، −٣)

∴ $\overrightarrow{\text{ى}}_{\text{أب}}$ = $\frac{\overrightarrow{\text{أب}}}{‖\overrightarrow{\text{أب}}‖}$ = $\frac{(٥، −١، −٣)}{\sqrt{٢٥+١+٩}}$

$\overrightarrow{\text{ى}}_{\text{أب}}$ = $\frac{(٥، −١، −٣)}{\sqrt{٣٥}}$ = ($\frac{٥}{\sqrt{٣٥}}$ ، $\frac{−١}{\sqrt{٣٥}}$ ، $\frac{−٣}{\sqrt{٣٥}}$)

∴ $\overrightarrow{\text{ى}}_{\text{ب أ}}$ = ($\frac{−٥}{\sqrt{٣٥}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣٥}}$ ، $\frac{٣}{\sqrt{٣٥}}$)

(١٦) اذا كان $\overrightarrow{\text{ج}}$ = ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{−١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) هو متجه وحدة في اتجاه كل من $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ وكان ‖ ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ‖ = ‖ −٥ $\overrightarrow{\text{ب}}$ ‖ = ١٥ فأوجد $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

- الحل -

∵ ‖ ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ‖ = ‖ −٥ $\overrightarrow{\text{ب}}$ ‖ = ١٥

∴ ٣ ‖ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ‖ = ٥ ‖ $\overrightarrow{\text{ب}}$ ‖ = ١٥

∴ ‖ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ‖ = ٥ ، ‖ $\overrightarrow{\text{ب}}$ ‖ = ٣

∴ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٥ ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{−١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) = ($\frac{٥}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{−٥}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$)

∴ $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٣ ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{−١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) = ($\frac{٣}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{−٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$)

(١٧) اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ متجه وحدة حيث
$\overrightarrow{\text{أ}}$ = (ل، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$) أوجد ل

- الحل -

$\sqrt{ل^٢ + \frac{٤}{٩} + \frac{٤}{٩}}$ = ١ ∴ $\sqrt{ل^٢ + \frac{٨}{٩}}$ = ١

∴ $ل^٢ + \frac{٨}{٩}$ = ١ ∴ $ل^٢$ = ١ − $\frac{٨}{٩}$ ∴ ل = ± $\frac{١}{٣}$

(18) إذا كان المتجهان $\vec{ب} = (ل ، ٤م ، \frac{1}{5})$

، $\vec{ج} = \frac{-2\sqrt{2}}{5}\vec{س} + \frac{4}{5}\vec{ص} + \frac{ن}{5}\vec{ع}$

هما متجها وحدة في اتجاه المتجه $\vec{م}$

(1) أوجد ل ، م ، ن

(2) إذا كان $\|\vec{م}\| = 15$ أوجد $\vec{م}$

- الحل -

$\because (\frac{-2\sqrt{2}}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 + (\frac{ن}{5})^2 = 1$

$\therefore \frac{8}{25} + \frac{16}{25} + \frac{ن^2}{25} = 1$

$\therefore 8 + 16 + ن^2 = 25$ $\therefore ن^2 = 25 - 24$

$\therefore ن^2 = 1$ $\therefore ن = \pm 1$

، $\because \vec{ج} = \vec{ب} = \vec{و_م}$

$\therefore \frac{-2\sqrt{2}}{5}\vec{س} + \frac{4}{5}\vec{ص} + \frac{1}{5}\vec{ع} = ل\vec{س} + ٤م\vec{ص} + \frac{1}{5}\vec{ع}$

$\therefore ل = \frac{-2\sqrt{2}}{5}$ ، $٤م = \frac{4}{5}$ $\therefore م = \frac{1}{5}$

(2) $\because \vec{و_م} = \frac{\vec{م}}{\|\vec{م}\|}$

$\therefore \vec{م} = \|\vec{م}\| \, \vec{و_م} = 15(\frac{-2\sqrt{2}}{5} ، \frac{4}{5} ، \frac{1}{5})$

$\therefore \vec{م} = (-6\sqrt{2} ، 12 ، 3)$

(19) أوجد جيوب تمام الاتجاه لكل من المتجهات الآتية

(1) $\vec{م} = 5\vec{س} - 2\vec{ص} + \sqrt{7}\,\vec{ع}$

- الحل -

$\|\vec{م}\| = 6$ $\therefore \vec{و_م} = (\frac{5}{6} ، \frac{-2}{6} ، \frac{\sqrt{7}}{6})$

$\therefore$ جيوب تمام الاتجاه هي $(\frac{5}{6} ، \frac{-1}{3} ، \frac{\sqrt{7}}{6})$

(2) $\vec{ك} = -5\vec{ص} + 12\vec{ع}$

- الحل -

$\|\vec{ك}\| = 13$ $\therefore \vec{و_ك} = (0 ، \frac{-5}{13} ، \frac{12}{13})$

$\therefore$ جيوب تمام الاتجاه هي $(0 ، \frac{-5}{13} ، \frac{12}{13})$

(20) أوجد قياسات زوايا الاتجاه لكل من المتجهات الآتية

(1) $\vec{أ} = (8 ، 6 ، -10)$

- الحل -

$\|\vec{أ}\| = 10\sqrt{2}$

$\therefore \vec{و_أ} = (\frac{8}{10\sqrt{2}} ، \frac{6}{10\sqrt{2}} ، \frac{-10}{10\sqrt{2}})$

$\therefore$ حتا $\theta_س = \frac{8}{10\sqrt{2}}$ $\therefore \theta_س = 55^\circ\, 33'$

، حتا $\theta_ص = \frac{6}{10\sqrt{2}}$ $\therefore \theta_ص = 64^\circ\, 54'$

، حتا $\theta_ع = \frac{-10}{10\sqrt{2}}$ $\therefore \theta_ع = 135^\circ$

(2) $\vec{م} = \vec{س} + \vec{ص}$

- الحل -

$\|\vec{م}\| = \sqrt{2}$ $\therefore \vec{و_م} = (\frac{1}{\sqrt{2}} ، \frac{1}{\sqrt{2}} ،$ صفر$)$

$\therefore$ حتا $\theta_س =$ حتا $\theta_ص = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \theta_س = \theta_ص = 45^\circ$

، حتا $\theta_ع =$ صفر $\therefore \theta_ع = 90^\circ$

(21) أوجد قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه $\vec{ج} = 3\vec{س} - 4\vec{ص} + 5\vec{ع}$ مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات

- الحل -

$\|\vec{ج}\| = 5\sqrt{2}$ $\therefore \vec{و_ج} = (\frac{3}{5\sqrt{2}} ، \frac{-4}{5\sqrt{2}} ، \frac{5}{5\sqrt{2}})$

∵ $\text{حتا}\,\theta_{ص} = \frac{٣}{٥\sqrt{٢}}$ ∴ $\theta_{ص} = ٦٤° \; ٥٤'$

، $\text{حتا}\,\theta_{ص} = \frac{-٤}{٥\sqrt{٢}}$ ∴ $\theta_{ص} = ١٢٤° \; ٢٧'$

، $\text{حتا}\,\theta_{ع} = \frac{٥}{٥\sqrt{٢}}$ ∴ $\theta_{ع} = ٤٥°$

(٢٢) اذا كان المتجه $\vec{م}$ يصنع مع محاور الاحداثيات الموجبة س، ص، ع زوايا قياساتها ٦٠°، ٨٠°، θ حيث θ زاوية حادة

① أوجد قيمة θ

② اكتب الصورة الجبرية للمتجه $\vec{م}$ اذا علمت أن $\|\vec{م}\| = ١٣$

- الحل -

∵ $\text{حتا}^٢ ٦٠ + \text{حتا}^٢ ٨٠ + \text{حتا}^٢ \theta = ١$

∴ $\text{حتا}^٢ \theta = ١ - \text{حتا}^٢ ٦٠ - \text{حتا}^٢ ٨٠$

$\simeq ٠,٧١٩٨٥$

∴ $\text{حتا}\,\theta = \pm \sqrt{٠,٧١٩٨٥}$

∵ θ زاوية حادة ∴ $\theta = ٣١° \; ٥٧'$

② $\vec{م} = ١٣ (\text{حتا}\,٦٠ ، \text{حتا}\,٨٠ ، \text{حتا}\,٣١° \; ٥٧')$

∴ $\vec{م} = \frac{١٣}{٢} \vec{س} + ٢,٢٦ \vec{ص} + ١١,٠٣ \vec{ع}$

(٢٣) أوجد زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه لمتجه يصنع مع محاور الاحداثيات الموجبة زوايا متساوية في القياس

- الحل -

نفرض أن $\theta_{س} = \theta_{ص} = \theta_{ع} = \theta$

∴ $\text{حتا}^٢ \theta + \text{حتا}^٢ \theta + \text{حتا}^٢ \theta = ١$

∴ $\text{حتا}^٢ \theta = \frac{١}{٣}$ ∴ $\text{حتا}\,\theta = \pm \frac{١}{\sqrt{٣}}$

∵ $\text{حتا}\,\theta = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنها $\theta = ٥٤° \; ٤٤'$

، $\text{حتا}\,\theta = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$ ومنها $\theta = ١٢٥° \; ١٦'$

وجيوب تمام الاتجاه هي $\left(\frac{\pm١}{\sqrt{٣}} ، \frac{\pm١}{\sqrt{٣}} ، \frac{\pm١}{\sqrt{٣}}\right)$

(٢٤) أوجد زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{م}$ الذي يقع في المستوى الاحداثي ص ع ويصنع زاوية قياسها ١٥° مع المحور ص

- الحل -

زوايا الاتجاه هي

(٩٠°، ١٥°، ٧٥°) أو (٩٠°، ١٥°، ١٠٥°)

(٢٥) أوجد الصورة الجبرية للمتجه $\vec{م}$ الذي معياره $٧\sqrt{٣}$ ويصنع زوايا متساوية القياس مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الاحداثيات

- الحل -

∵ $٣\,\text{حتا}^٢ \theta = ١$ ∴ $\text{حتا}^٢ \theta = \frac{١}{٣}$

صابر عبد الرحيم محمود

∴ $\text{حتا}\,\theta = \pm \frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ $\vec{م} = ٧\sqrt{٣} \left(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}}\right) = (٧ ، ٧ ، ٧)$

أو $\vec{م} = ٧\sqrt{٣} \left(\frac{-١}{\sqrt{٣}} ، \frac{-١}{\sqrt{٣}} ، \frac{-١}{\sqrt{٣}}\right) = (-٧ ، -٧ ، -٧)$

(٢٦) اذا كانت $\theta_{س} ، \theta_{ص} ، \theta_{ع}$ هي زوايا الاتجاه لمتجه مع محاور الاحداثيات الموجبة اثبت أن

$\text{حا}^٢ \theta_{س} + \text{حا}^٢ \theta_{ص} + \text{حا}^٢ \theta_{ع} = ٢$

- الحل -

∵ $\text{حتا}^٢ \theta_{س} + \text{حتا}^٢ \theta_{ص} + \text{حتا}^٢ \theta_{ع} = ١$

$\therefore 1 - \text{جا}^2\theta_س + 1 - \text{جا}^2\theta_ص + 1 - \text{جا}^2\theta_ع = 1$

$\therefore 3 - \text{جا}^2\theta_س - \text{جا}^2\theta_ص - \text{جا}^2\theta_ع = 1$

$\therefore \text{جا}^2\theta_س + \text{جا}^2\theta_ص + \text{جا}^2\theta_ع = 2$

(٢٧) في الشكل المقابل
مكعب طول حرفه ٥ وحدة طولية، $\vec{ق}$ قوة مقدارها ٢٥ نيوتن أوجد:

① جيوب تمام الاتجاه لمتجه $\vec{ق}$

② قياسات زوايا الاتجاه لمتجه $\vec{ق}$

③ متجه القوة $\vec{ق}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية في الفراغ ثلاثي الأبعاد

- الحل -

① $\because \vec{و م} = (٥، ٥، ٥)$ $\therefore \|\vec{و م}\| = ٥\sqrt{٣}$

$\therefore \vec{ى}_{و م} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

وهي جيوب تمام الاتجاه لمتجه $\vec{ق}$

② $\theta_س = \theta_ص = \theta_ع = \text{جتا}^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = ٤٤َ ٥٤°$

③ $\vec{ق} = ٢٥\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= \frac{٢٥}{\sqrt{3}}\vec{س} + \frac{٢٥}{\sqrt{3}}\vec{ص} + \frac{٢٥}{\sqrt{3}}\vec{ع}$



(٢٨) الشكل المقابل يمثل قوة $\vec{ق}$ مقدارها ٢٠٠ نيوتن

① عبر عن القوة $\vec{ق}$ بالصورة الكيرتيزية

② أوجد قياسات زوايا الاتجاه للقوة $\vec{ق}$

- الحل -

① نفرض أن $\vec{م}$ يمثل القطر تمثيلاً تاماً

$\therefore \vec{م} = (٣، ٤، ٥)$

$\therefore \|\vec{م}\| = ٥\sqrt{٢}$

$\therefore \vec{ى}_م = \left(\frac{٣}{٥\sqrt{٢}}, \frac{٤}{٥\sqrt{٢}}, \frac{٥}{٥\sqrt{٢}}\right)$

$\therefore \vec{ق} = ٢٠٠\left(\frac{٣}{٥\sqrt{٢}}, \frac{٤}{٥\sqrt{٢}}, \frac{٥}{٥\sqrt{٢}}\right)$

$\therefore \vec{ق} = ٦٠\sqrt{٢}\,\vec{س} + ٨٠\sqrt{٢}\,\vec{ص} + ١٠٠\sqrt{٢}\,\vec{ع}$

② $\theta_س = \text{جتا}^{-1}\frac{٣}{٥\sqrt{٢}} \simeq ٥٤َ ٦٤°$

$\theta_ص = \text{جتا}^{-1}\frac{٤}{٥\sqrt{٢}} \simeq ٣٣َ ٥٥°$

$\theta_ع = \text{جتا}^{-1}\frac{٥}{٥\sqrt{٢}} = ٤٥°$

(٢٩) في الشكل المقابل:
أوجد مركبات القوة $\vec{ق}$ التي مقدارها $١٢\sqrt{٢٩}$ نيوتن

- الحل -

$\vec{م} = (-٢، ٤، ٣)$ $\therefore \|\vec{م}\| = \sqrt{٢٩}$

$\vec{ى}_م = \left(\frac{-٢}{\sqrt{٢٩}}, \frac{٤}{\sqrt{٢٩}}, \frac{٣}{\sqrt{٢٩}}\right)$

∴ $\overrightarrow{ق} = 12\sqrt{29}\left(\frac{-2}{\sqrt{29}} ، \frac{4}{\sqrt{29}} ، \frac{3}{\sqrt{29}}\right)$

∴ $\overrightarrow{ق} = (-24 ، 48 ، 36)$

∴ $ق_س = -24$ ، $ق_ص = 48$ ، $ق_ع = 36$

---

③٠ الشكل المقابل يمثل متجه $\overrightarrow{م}$ معياره ١٠ وحدات

① عبر عن المتجه $\overrightarrow{م}$ بالصورة الجبرية (المركبات الكارتيزية)

② أوجد قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{م}$

- الحل -

نحلل $\overrightarrow{م}$ إلى مركبتين : الأولى في اتجاه $\overrightarrow{وع}$ ومقدارها $م_ع = \|\overrightarrow{م}\| \text{ جتا } \theta_ع$

$= 10 \text{ جتا } 30 = 5\sqrt{3}$

والثانية تقع في المستوى الإحداثي س ص ومقدارها $م_{سص} = \|\overrightarrow{م}\| \text{ جا } \theta_ع$

$= 10 \text{ جا } 30 = 5$

ثم نحلل المركبة $م_{سص}$ إلى مركبتين الأولى في اتجاه $\overrightarrow{وس}$ ومقدارها

$م_س = م_{سص} \text{ جتا } 45 = 5 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

والثانية في اتجاه $\overrightarrow{وص}$ ومقدارها

$م_ص = م_{سص} \text{ جا } 45 = 5 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

وبذلك تكون الصورة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{م}$

هي $\overrightarrow{م} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{س} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{ص} + 5\sqrt{3}\,\overrightarrow{ع}$

ولإيجاد زوايا الاتجاه

$ك_م = \frac{\overrightarrow{م}}{\|\overrightarrow{م}\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} ، \frac{\sqrt{2}}{4} ، \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

∴ $\theta_س = \theta_ص = 69^\circ \, 18'$ ، $\theta_ع = 30^\circ$

- تمارين عامة -

① أوجد معيار كل من المتجهات الآتية :

① $\overrightarrow{أ} = (1 ، 2 ، -2)$ ② $\overrightarrow{ب} = 3\overrightarrow{س} + 4\overrightarrow{ص}$

② إذا كان $\overrightarrow{أ} = (4 ، -5 ، 2)$ ، $\overrightarrow{ب} = (2 ، 3 ، -2)$
أوجد

① $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ ② $3\overrightarrow{أ} - 4\overrightarrow{ب}$

③ أوجد قيمة ل ، م ، ن التي تجعل المتجهين
$\overrightarrow{أ} = (ل - 4 ، م^2 - 3 ، 1)$ ، $\overrightarrow{ب} = (5 ، 1 ، ن^2)$
متساويين

④ إذا كان $\overrightarrow{أ} = (4 ، -6 ، 2)$ ،
$3(\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}) = 7\overrightarrow{ب} - 2\overrightarrow{أ}$ أوجد $\|\overrightarrow{ب}\|$

⑤ أوجد جيوب تمام الاتجاه لكل من المتجهات الآتية :

① $\overrightarrow{ب} = (-2 ، 2\sqrt{2} ، 2)$

② $\overrightarrow{ج} = 4\overrightarrow{س} - 3\overrightarrow{ع}$

③ $\overrightarrow{م} = 3\overrightarrow{س} + 12\overrightarrow{ص} + 4\overrightarrow{ع}$

⑥ أوجد قياسات زوايا الاتجاه لكل من المتجهات الآتية:

① $\overrightarrow{ج} = -2\overrightarrow{س} + 3\overrightarrow{ص} - 6\overrightarrow{ع}$

② $\overrightarrow{هـ} = \overrightarrow{ع}$

⑥ المتجه $\overrightarrow{م}$ يصنع زاوية قياسها 30° مع الاتجاه الموجب للمحور س ، أخرى قياسها 60° مع الاتجاه الموجب للمحور ص أوجد قياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب للمحور ع

الضرب القياسي لمتجهين

•• مركبة (مسقط) متجه في اتجاه متجه آخر:

اذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين غير صفريين في الفراغ ثلاثي الأبعاد ومثلناهما هندسياً بالقطعتين المستقيمتين الموجهتين $\overrightarrow{وج}$ ، $\overrightarrow{ود}$ الخارجتين من نفس النقطة و فإن

• θ هي قياس الزاوية الصغرى بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

• $\|\overrightarrow{أ}\|$ هو طول القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{وج}$

• $\|\overrightarrow{ب}\|$ هو طول القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{ود}$

• ل هو طول مسقط (مركبة) المتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$

من هندسة الشكل المقابل:

∴ ل = وج جتا θ

∴ مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه $\overrightarrow{ب}$ = $\|\overrightarrow{أ}\|$ جتا θ

الضرب القياسي لمتجهين

$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\|$ جتا θ

ملاحظات:

① عند تعيين الزاوية الصغرى بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ يجب أن يكون المتجهان خارجين من (أو داخلين إلى) نفس النقطة.

② اذا كان θ هو قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ حيث $\theta \in [0 ، \pi]$ فإن

(أ) $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} >$ صفر اذا كان $0 < \theta < 90$

(ب) $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} <$ صفر اذا كان $90 < \theta < 180$

(ج) $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} =$ صفر اذا كان $\theta = 90°$
أي أن $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان

(د) $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\|$
اذا كان θ = صفر أي أن $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان وفي نفس الاتجاه ومنها فإن
$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\|^2$

(هـ) $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = -\|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\|$
اذا كان $\theta = 180°$ أي أن $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان وكل منهما في عكس اتجاه الآخر

خواص الضرب القياسي

① خاصية الإبدال $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{أ}$

② خاصية التوزيع
$\overrightarrow{أ} \cdot (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ج}) = \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ج}$

③ اذا كان ك عدد حقيقي فإن
$(ك\overrightarrow{أ}) \cdot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} \cdot (ك\overrightarrow{ب}) = ك(\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب})$

④ اذا كان أحد المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ أو كلاهما هو المتجه الصفري فإن
$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = صفر أي أن
$\overrightarrow{أ} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \overrightarrow{أ} = \vec{0} \cdot \vec{0}$ = صفر

⑤ اذا كان $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = صفر فإما
(أ) $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ أحدهما أو كلاهما متجه صفري
(ب) وإما $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان

⑥ $\overrightarrow{س} \cdot \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص} \cdot \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع} \cdot \overrightarrow{ع} = 1$

⑦ $\overrightarrow{س} \cdot \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ص} \cdot \overrightarrow{س} = \overrightarrow{س} \cdot \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ع} \cdot \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص} \cdot \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ع} \cdot \overrightarrow{ص}$ = صفر

⑧ اذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overrightarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ فإن
$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = أ_س ب_س + أ_ص ب_ص + أ_ع ب_ع$

الزاوية بين متجهين

اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين غير صفريين فإن قياس الزاوية الصغرى بينهما θ

$$\therefore \text{حتا}\,\theta = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$$

حيث $0° \le \theta \le 180°$

لاحظ أنه اذا كانت

① حتا $\theta = 1$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب}}$ ولهما نفس الاتجاه

② حتا $\theta = -1$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب}}$ وكل منهما في عكس اتجاه الآخر

③ حتا $\theta =$ صفر فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$

ملاحظات:

① ∵ مركبة (مسقط) المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ في اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ ويرمز لها بالرمز

$$\text{أ}_{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|\ \text{حتا}\,\theta$$

$$\because \text{حتا}\,\theta = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$$

$$\therefore \text{أ}_{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \times \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$$

$$\therefore \text{أ}_{\text{ب}} = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$$

∴ مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ في اتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$ هي:

$$\text{أ}_{\text{ب}} = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$$

وتسمى أيضاً بالمركبة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ في اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$

② المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ في اتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$

= (المركبة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ في اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$) × (متجه وحدة في اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$)

$$= \left(\frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}\right)\left(\frac{\overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}\right) = \left(\frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|^{2}}\right)\overrightarrow{\text{ب}}$$

الشغل المبذول من قوة

اذا أثرت قوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ على جسم ما فحركته بإزاحة $\overrightarrow{\text{ف}}$ فإننا نقول أن القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ قد بذلت شغلاً (شغ) حيث

$$\text{شغ} = \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ف}} = \|\overrightarrow{\text{ق}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ف}}\|\ \text{حتا}\,\theta$$

ملاحظات:

① اذا كانت القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ في نفس اتجاه الإزاحة ($\theta =$ صفر) فإن شغ $= \|\overrightarrow{\text{ق}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ف}}\|$

② اذا كانت القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ عكس اتجاه الإزاحة ($\theta = 180°$) فإن شغ $= -\|\overrightarrow{\text{ق}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ف}}\|$

③ اذا كانت القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ عمودية على اتجاه الإزاحة ($\theta = 90°$) فإن شغ = صفر

④ اذا كانت وحدة قياس مقدار القوة بالنيوتن ، مقدار الإزاحة بالمتر فإن الشغل المبذول يكون بالجول حيث الجول = نيوتن · متر

⑤ اذا كانت وحدة قياس مقدار القوة بالداين ، مقدار الإزاحة بالسم فإن الشغل المبذول يكون بالإرج حيث الإرج = داين · سم

- أمثلة محلولة -

① إذا كان أ ، ب متجهين ، قياس الزاوية بينهما ١٣٥° وكان ‖أ‖ = ٦√٢ ، ‖ب‖ = ١٠√٢ أوجد أ • ب

- الحل -

أ • ب = ‖أ‖ ‖ب‖ جتا θ

= ٦√٢ × ١٠√٢ جتا ١٣٥

= −٦٠√٢

② أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٠ سم أوجد كلاً مما يأتي:

① أب • دجـ ② أب • بجـ

③ أب • جـأ

- الحل -

① أب • دجـ = ١٠ × ١٠ جتا صفر = ١٠٠

② أب • بجـ = ١٠ × ١٠ جتا ٩٠ = صفر

③ أب • جـأ = − أب • أجـ = −١٠ × ١٠√٢ جتا ٤٥ = −١٠٠

③ أ ب جـ د مستطيل فيه أب = ٦ سم ، بجـ = ٨ سم أوجد:

① أب • أجـ ② أب • جـد

③ مركبة جـد في اتجاه بجـ

- الحل -

① أب • أجـ = ٦ × ١٠ × ٦/١٠ = ٣٦

② أب • جـد = ٦ × ٦ جتا ١٨٠ = −٣٦

③ مركبة جـد في اتجاه بجـ = (جـد • بجـ) / ‖بجـ‖ = صفر

④ أوجد أ • ب في كل من الحالات الآتية:

① أ = (٥ ، ١ ، −٢) ، ب = (٤ ، −٤ ، ٣)

- الحل -

أ • ب = ٢٠ − ٤ − ٦ = ١٠

② أ = −٣ س − ٢ ص − ع ، ب = ٦ س + ٤ ص + ٢ ع

- الحل -

أ • ب = (−٣ ، −٢ ، −١) • (٦ ، ٤ ، ٢)

= −١٨ − ٨ − ٢ = −٢٨

③ أ = ٢ س − ٣ ص ، ب = ٣ س − ٢ ص

- الحل -

أ • ب = (٢ ، −٣ ، ٠) • (٣ ، −٢ ، ٠)

= ٦ + ٦ = ١٢

⑤ أوجد قياس الزاوية بين المتجهين أ ، ب إذا كان ‖أ‖ = ١٦ ، ‖ب‖ = ١٠ ، أ • ب = ٨٠

- الحل -

جتا θ = (أ • ب) / (‖أ‖ ‖ب‖) = ٨٠ / (١٦ × ١٠) = ١/٢

∴ ق(θ) = ٦٠°

⑥ أوجد قياس الزاوية بين المتجهين في كل من الحالات الآتية:

① (٥ ، ١ ، −٢) ، (١ ، ١ ، −١)

- الحل -

حتا θ = (٥ ، ١ ، −٢) • (١ ، ١ ، −١) ÷ (√٣٠ × √٣) = ٨ ÷ ٣√١٠

∴ θ = ٣٢° ٣٠′ ٤٥″

② ٤ س + ٣ ص + ٧ ع ، ٢ س + ٥ ص + ٤ ع

- الحل -

حتا θ = (٤ ، ٣ ، ٧) • (٢ ، ٥ ، ٤) ÷ (√٧٤ × √٤٥) = ٥١ ÷ ٣√٣٧٠

∴ θ = ٣٧° ٥٣′ ٥٠″

⑦ إذا كان أ متجه معياره ٣٠ ، ب متجه معياره ٤٠ ، قياس الزاوية بينهما ٦٠° أوجد

① أ • ب ② ||أ + ب||

③ مسقط المتجه أ + ب في اتجاه المتجه أ

- الحل -

① أ • ب = ||أ|| ||ب|| حتاهـ

= ٣٠ × ٤٠ حتا ٦٠ = ٦٠٠

② ||أ + ب||² = ||أ||² + ||ب||² + ٢ أ • ب

= ٩٠٠ + ١٦٠٠ + ٢ × ٦٠٠ = ٣٧٠٠

∴ ||أ + ب|| = √٣٧٠٠ = ١٠√٣٧

③ مسقط أ + ب في اتجاه أ

= (أ + ب) • أ ÷ ||أ|| = (||أ||² + ب • أ) ÷ ||أ||

= ((٣٠)² + ٦٠٠) ÷ ٣٠ = ٥٠

⑧ إذا كان أ = ٣ س + ٤ ص + ٥ ع ، ب = س + ل ص + ٥ ع فأوجد ل التي تجعل قياس الزاوية بين أ ، ب تساوي ٦٠°

- الحل -

∵ أ • ب = أ ب حتاهـ

(٣ ، ٤ ، ٥) • (١ ، ل ، ٥) = ٥√٢ × √(٢٦ + ل²) × ١/٢

∴ ٣ + ٤ل + ٢٥ = (٥/٢) √٢ × √(٢٦ + ل²) ①

بالتربيع

(٤ل + ٢٨)² = (٢٥/٢) (٢٦ + ل²)

∴ ١٦ل² + ٢٢٤ل + ٧٨٤ = (٢٥/٢) (٢٦ + ل²)

∴ ٧ل² + ٤٤٨ل + ٩١٨ = صفر

∴ ل = −٢٫١٢ أو ، ل = −٦١٫٨٨

والحل الثاني مرفوض لأنه لا يحقق المعادلة ①

⑨ إذا كان أ = (٢ حتا θ ، لو٢ س ، جا θ) ، ب = (حتا θ ، لو٥ ٢٧ ، ٢ جا θ) وكان أ • ب = ١١ أوجد قيمة س حيث θ قياس الزاوية بين المتجهين أ ، ب

- الحل -

أ • ب = ٢ حتا² θ + لو٢ س • لو٥ ٢٧ + ٢ جا² θ

∴ أ • ب = ٢ + لو٢ س • لو٥ ٢٧

∴ ١١ = ٢ + لو٢ س • لو٥ ٢٧

∴ لو٢ س لو٥ ٢٧ = ٩ ∴ لو٢ س = ٩ ÷ لو٥ ٢٧

∴ س = ٢^(٩ ÷ لو٥ ٢٧) ≃ ٢١٫٠٤

(١٠) في الشكل المقابل: أ ب جـ د أَ بَ جـَ دَ متوازي مستطيلات

أوجد $\overrightarrow{بَدَ} \cdot \overrightarrow{جـَأ}$

- الحل -

$\overrightarrow{بَدَ} = \overrightarrow{دَ} - \overrightarrow{بَ} = (٠،٠،٦) - (٤،٨،٦)$

$= (-٤،-٨،٠)$

$\overrightarrow{جـَأ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{جـَ} = (٠،٨،٦) - (٤،٠،٦)$

$= (-٤،٨،٠)$

$\therefore \overrightarrow{بَدَ} \cdot \overrightarrow{جـَأ} = (-٤،-٨،٠) \cdot (-٤،٨،٠)$

$= ١٦ - ٦٤ + صفر = -٤٨$

(١١) أوجد قياسات زوايا $\triangle$ أ ب جـ حيث أ(٢،−٣،٤) ، ب(٠،١،٢) ،

جـ(−١،٢،٠)

- الحل -

$\because \overrightarrow{أب} = (-٢،٤،-٢)$ ، $\|\overrightarrow{أب}\| = ٢\sqrt{٦}$

، $\overrightarrow{بجـ} = (-١،١،-٢)$ ، $\|\overrightarrow{بجـ}\| = \sqrt{٦}$

، $\overrightarrow{أجـ} = (-٣،٥،-٤)$ ، $\|\overrightarrow{أجـ}\| = ٥\sqrt{٢}$

$\because ق(\hat{أ}) = حتا^{-1} \frac{\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{أجـ}}{\|\overrightarrow{أب}\| \, \|\overrightarrow{أجـ}\|}$

$\therefore ق(\hat{أ}) = حتا^{-1} \frac{٦+٢٠+٨}{٢٠\sqrt{٣}} \simeq ١١^\circ \; ٢' \; ٤٢''$

، $\because ق(\hat{ب}) = حتا^{-1} \frac{\overrightarrow{بأ} \cdot \overrightarrow{بجـ}}{\|\overrightarrow{بأ}\| \, \|\overrightarrow{بجـ}\|}$

$\therefore ق(\hat{ب}) = حتا^{-1} \frac{٢+٤+٤}{١٢}$

$\therefore ق(\hat{ب}) = حتا^{-1} \frac{١٠}{١٢} \simeq ٣٣^\circ \; ٣٣' \; ٢٦''$

$\therefore ق(\hat{جـ}) = ١٨٠ - (٣٣^\circ \; ٣٣' \; ٢٦'' + ١١^\circ \; ٢' \; ٤٢'')$

$= ١٣٥^\circ \; ٢٤' \; ١٢''$

(١٢) أوجد قيمة ك التي تجعل المتجهين

$\overrightarrow{أ} = ٣\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع}$ ،

$\overrightarrow{ب} = ٢\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص} + ك\overrightarrow{ع}$ متعامدان

- الحل -

لكي يكون المتجهان متعامدان فإن

$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = صفر$

$\therefore (٣،-٢،٥) \cdot (٢،٤،ك) = صفر$

$\therefore ٦ - ٨ + ٥ك = صفر \quad \therefore -٢ + ٥ك = صفر$

$\therefore ٥ك = ٢ \quad \therefore ك = \frac{٢}{٥}$

(١٣) أوجد ك إذا كان حاصل الضرب القياسي

للمتجهين $\overrightarrow{أ} = ك\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} + ٤\overrightarrow{ع}$ ،

$\overrightarrow{ب} = ٢\overrightarrow{س} + ٦\overrightarrow{ص} + ٣\overrightarrow{ع}$ هو ٤

- الحل -

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = ٢ك + ٦ + ١٢$

$\therefore ٤ = ٢ك + ١٨ \quad \therefore ٢ك = -١٤$

$\therefore ك = -٧$

(١٤) إذا كان $\|\overrightarrow{أ}\| = \|\overrightarrow{ب}\|$ وكانت

الزاوية بين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ قياسها ٦٠° وكان

$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \frac{١}{٢}$ أوجد $\|\overrightarrow{أ}\|$

- الحل -

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\| حتا \theta$

$\therefore \frac{١}{٢} = \|\overrightarrow{أ}\|^{٢} \times حتا ٦٠$

$\therefore \frac{١}{٢} = \|\overrightarrow{أ}\|^{٢} \times \frac{١}{٢}$

$\therefore \|\overrightarrow{أ}\|^{٢} = ١ \quad \therefore \|\overrightarrow{أ}\| = ١$

⑮ اذا كان $\vec{أ} + \vec{ب} + \vec{ج} = \vec{0}$ ، $||\vec{أ}|| = ٣$ ، $||\vec{ب}|| = ٥$ ، $||\vec{ج}|| = ٧$

اثبت أن قياس الزاوية بين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ هو ٦٠°

- الحل -

∵ $\vec{أ} + \vec{ب} + \vec{ج} = \vec{0}$ ∴ $\vec{أ} + \vec{ب} = -\vec{ج}$

∴ $(\vec{أ} + \vec{ب}) \cdot (\vec{أ} + \vec{ب}) = -\vec{ج} \cdot -\vec{ج}$

∴ $||\vec{أ}||^2 + ||\vec{ب}||^2 + ٢\, \vec{أ} \cdot \vec{ب} = ||\vec{ج}||^2$

∴ ٩ + ٢٥ + ٢ × ٣ × ٥ حتا θ = ٤٩

∴ ٣٤ + ٣٠ حتا θ = ٤٩

∴ ٣٠ حتا θ = ٤٩ − ٣٤ = ١٥

∴ حتا θ = $\frac{١٥}{٣٠} = \frac{١}{٢}$ ∴ θ = ٦٠°

⑯ أ ب ج د مستطيل فيه أب = ٤٠ سم ، ب ج = ٣٠ سم عين مركبة المتجه $\vec{ب د}$ في اتجاهي $\vec{ب ج}$ ، $\vec{د ج}$

- الحل -

مركبة $\vec{ب د}$ في اتجاه $\vec{ب ج}$ = $||\vec{ب د}||$ حتا (د ب̂ ج) = ٥٠ × $\frac{٣٠}{٥٠}$ = ٣٠

مركبة $\vec{ب د}$ في اتجاه $\vec{د ج}$

= $-||\vec{ب د}||$ حتا (ب د̂ ج) = −٥٠ × $\frac{٤٠}{٥٠}$

= −٤٠

⑰ أ ب ج د مربع طول ضلعه ١٠ سم ، عين حاصل الضرب القياسي للمتجهين $\vec{ب د}$ ، $\vec{ب أ}$ ثم احسب مسقط المتجه $\vec{ب د}$ في اتجاه المتجه $\vec{ج ب}$

- الحل -

$\vec{ب د} \cdot \vec{ب أ}$ =

$||\vec{ب د}||\ ||\vec{ب أ}||$ حتا (د ب̂ أ)

= ١٠ $\sqrt{٢}$ × ١٠ حتا ٤٥ = ١٠٠

مسقط $\vec{ب د}$ في اتجاه $\vec{ج ب}$

= $-||\vec{ب د}||$ حتا (د ب̂ ج)

= −١٠ $\sqrt{٢}$ حتا ٤٥ = −١٠

⑱ اذا كان $||\vec{أ}|| = ١١$ ، $||\vec{ب}|| = ٢٣$ ، $||\vec{أ} - \vec{ب}|| = ٣٠$ أوجد $||\vec{أ} + \vec{ب}||$ ، قياس الزاوية بين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$

- الحل -

$||\vec{أ} - \vec{ب}||^2 = (\vec{أ} - \vec{ب}) \cdot (\vec{أ} - \vec{ب})$

$= ||\vec{أ}||^2 + ||\vec{ب}||^2 - ٢\, \vec{أ} \cdot \vec{ب}$

∴ $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = \frac{||\vec{أ}||^2 + ||\vec{ب}||^2 - ||\vec{أ} - \vec{ب}||^2}{٢}$

∴ $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = \frac{١٢١ + ٥٢٩ - ٩٠٠}{٢} = -١٢٥$

$||\vec{أ} + \vec{ب}||^2 = ||\vec{أ}||^2 + ||\vec{ب}||^2 + ٢\, \vec{أ} \cdot \vec{ب}$

= ١٢١ + ٥٢٩ + ٢ × −١٢٥ = ٤٠٠

∴ $||\vec{أ} + \vec{ب}|| = \sqrt{٤٠٠} = ٢٠$

قياس الزاوية بين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ هو هـ

حتا هـ = $\frac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{||\vec{أ}||\ ||\vec{ب}||} = \frac{-١٢٥}{١١ \times ٢٣}$

∴ θ = ١١٩° ٣٦' ٣١''

⑲ اذا كان $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجهي وحدة وكان $||\vec{أ} + \vec{ب}|| = \sqrt{٣}$ أوجد قيمة $(٣\vec{أ} - ٤\vec{ب}) \cdot (٢\vec{أ} + ٥\vec{ب})$

- الحل -

∵ $||\vec{أ} + \vec{ب}||^2 = ||\vec{أ}||^2 + ||\vec{ب}||^2 + ٢\, \vec{أ} \cdot \vec{ب}$

∴ $(\sqrt{٣})^2 = ||\vec{أ}||^2 + ||\vec{ب}||^2 + ٢\, \vec{أ} \cdot \vec{ب}$

∵ أ ، ب متجهي وحدة

∴ ٢ أ . ب = ٣ − ٢ = ١ ∴ أ . ب = $\frac{١}{٢}$

∴ (٣ أ − ٤ ب) . (٢ أ + ٥ ب)

= ٦ ||أ||^{٢} + ١٥ أ . ب − ٨ أ . ب − ٢٠ ||ب||^{٢}

= ٦ + ١٥ × $\frac{١}{٢}$ − ٨ × $\frac{١}{٢}$ − ٢٠ = $\frac{-٢١}{٢}$

(٢٠) اذا كان أ = س + ٢ ص − ٣ ع ، ب = ٣ س − ص + ٢ ع اثبت أن المتجه (أ + ب) عمودى على المتجه (أ − ب)

- الحل -

أ + ب = (٤ ، ١ ، −١)

أ − ب = (−٢ ، ٣ ، −٥)

∴ (أ + ب) . (أ − ب)

= −٨ + ٣ + ٥ = صفر

∴ المتجه (أ + ب) عمودى على المتجه (أ − ب)

(٢١) اذا كان أ = ٢ س + ٢ ص + ٣ ع ، ب = − س + ٢ ص + ع ، جـ = ٣ س + ص وكان المتجه (أ + ل ب) عمودياً على المتجه جـ أوجد قيمة ل

- الحل -

أ + ل ب = (٢ − ل ، ٢ + ٢ل ، ٣ + ل)

، جـ = (٣ ، ١ ، صفر)

∵ أ + ل ب ⊥ جـ

∴ (أ + ل ب) . جـ = صفر

∴ ٣(٢ − ل) + ١(٢ + ٢ل) + صفر(٣ + ل) = صفر

∴ ٦ − ٣ل + ٢ + ٢ل = صفر

∴ − ل + ٨ = صفر

∴ ل = ٨

(٢٢) اذا كان أ . ب = −١ ، أ . جـ = ٦ ، أ . د = ٥ ، ب = (٣ ، ٠ ، −٥) ، جـ = (٢ ، ٧ ، ٠) ، د = (١ ، ١ ، ١) أوجد أ

- الحل -

نفرض أن أ = (س ، ص ، ع)

∴ أ . ب = ٣س − ٥ع = −١ ①

∴ أ . جـ = ٢س + ٧ص = ٦ ②

∴ أ . د = س + ص + ع = ٥ ③

بحل المعادلات ① ، ② ، ③ ينتج أن

س = ٣ ، ص = صفر ، ع = ٢

∴ أ = (٣ ، صفر ، ٢)

(٢٣) أوجد مركبة أ فى اتجاه ب لكل مما يأتى

① أ = (٢ ، −٤ ، ٧) ، ب = (٤ ، −١ ، −١)

- الحل -

مركبة أ فى اتجاه ب = $\frac{\text{أ . ب}}{||\text{ب}||}$

= $\frac{٨ + ٤ - ٧}{٣\sqrt{٢}}$ = $\frac{٥}{٣\sqrt{٢}}$

② أ = (٢ ، −٢ ، ١) ، ب = (٤ ، ٠ ، ٣)

- الحل -

مركبة أ فى اتجاه ب = $\frac{\text{أ . ب}}{||\text{ب}||}$

= $\frac{٨ + \text{صفر} + ٣}{\sqrt{٢٥}}$ = $\frac{١١}{٥}$

(٢٤) أوجد مركبة القوة ق = ٢ س − ٣ ص + ٥ ع فى اتجاه أب حيث أ (١ ، ٤ ، ٠) ، ب (−١ ، ٢ ، ٣)

- الحل -

أب = ب − أ = (−٢ ، −٢ ، ٣) ، ||أب|| = $\sqrt{١٧}$

مركبة ق فى اتجاه أب = $\frac{\text{ق . أب}}{||\text{أب}||}$

= $\frac{-٤ + ٦ + ١٥}{\sqrt{١٧}}$ = $\sqrt{١٧}$

⑳٥ أوجد المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{أب}$ حيث أ(٢، ١، ٠)، ب(٣، ١، $\sqrt{3}$) في اتجاه المتجه م حيث م = (٣، ٢، $2\sqrt{3}$)

- الحل -

$\overrightarrow{أب}$ = ب − أ = (١، ٠، $\sqrt{3}$)

م = (٣، ٢، $2\sqrt{3}$)، ‖م‖ = ٥

المركبة الاتجاهية لـ $\overrightarrow{أب}$ في اتجاه م

= $\frac{\overrightarrow{أب} \cdot م}{‖م‖^2}$ م = $\frac{٣ + ٠ + ٦}{٢٥}$ (٣، ٢، $2\sqrt{3}$)

= $\frac{٩}{٢٥}$ (٣، ٢، $2\sqrt{3}$)

= ($\frac{٢٧}{٢٥}$، $\frac{١٨}{٢٥}$، $\frac{١٨\sqrt{3}}{٢٥}$)

⑳٦ أوجد الشغل المبذول من القوة ق = (٤، −٦، ١٠) لتحريك جسم من نقطة أ(٢، ١، ٣) إلى نقطة ب حيث ب = (٣، ٦، ١)

- الحل -

$\overrightarrow{أب}$ = ب − أ = (١، ٥، −٢)

الشغل = ق · $\overrightarrow{أب}$

= (٤، −٦، ١٠) · (١، ٥، −٢)

= ٤ − ٣٠ − ٢٠ = −٤٦

⑳٧ أوجد الشغل المبذول من وزن جسم مقداره ٥٠ نيوتن يتحرك رأسياً مسافة ١٥ متر فوق سطح الأرض إذا كان

① الجسم يتحرك رأسياً لأعلى

② الجسم يتحرك رأسياً لأسفل

- الحل -

① ش = ٥٠ × ١٥ حتا ١٨٠ = −٧٥٠ جول

② ش = ٥٠ × ١٥ حتا صفر = ٧٥٠ جول

⑳٨ في الشكل المقابل: شخص يسحب صندوقاً بقوة شد مقدارها ١٦٠ نيوتن، وتميل على الأفقي بزاوية ظل قياسها $\frac{٣}{٤}$ لتحركه مسافة أفقية مقدارها ٥ أمتار. أوجد الشغل المبذول من قوة الشد

(شكل: ١٦٠ نيوتن، θ)

- الحل -

الشغل = ق × ف × حتا θ

= ١٦٠ × ٥ × $\frac{٤}{٥}$

= ٦٤٠ جول

(مثلث: ٥، ٣، ٤، θ)

⑳٩ في الشكل المقابل: شخص يرفع صندوقاً بواسطة خيط يمر على بكرة ملساء، ويميل على الرأسي بزاوية قياسها ٣٠° فإذا كانت قوة الشد في الخيط ١٢٠ نيوتن ليرتفع الصندوق عن سطح الأرض مسافة ٣ أمتار فأوجد الشغل المبذول من قوة الشد في جزء الخيط بين البكرة والرجل

- الحل -

الشغل = ق ف حتا θ

= ١٢٠ × ٣ حتا ٣٠

= ١٨٠ $\sqrt{3}$ جول



- تمارين عامة -

① اذا كان أ ، ب متجهين ، قياس الزاوية بينهما 60° ، وكان ||أ|| = 3 ، ||ب|| = 6 أوجد أ . ب

② أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 2 سم أوجد كلاً من:
① أب . أجـ ② أجـ . جـ ب
③ (4 أب) . (3 جـ ب)

③ أوجد أ . ب في كل من الحالات الآتية
① أ = (-2 ، 4 ، 2) ، ب = 5 س - 3 ص + 6 ع
② أ = ص ، ب = 2 س - 3 ع
③ أ = 9 س + 3 ص - ع ، ب = 6 س - 4 ص - 2 ع

④ أوجد قياس الزاوية بين المتجهين أ ، ب اذا كان
① ||أ|| = 25 ، ||ب|| = 18 ، أ . ب = -225 $\sqrt{2}$
② ||أ|| = 32 ، ||ب|| = 25 ، ب . أ = -480
③ (4 ، 1 ، 2) ، (0 ، -2 ، 1)
④ أ = 6 س + 2 ص + 3 ع ، ب = 2 س - 9 ص + 6 ع

⑤ أوجد قياسات زوايا Δ أ ب جـ حيث أ(1 ، 2 ، 3) ، ب(-1 ، 0 ، 0) ، جـ(0 ، 1 ، 2)

⑥ اذا كان أ = (2 ، 3 ، 4) ، ب = (3 ، 2 ، -ل) متعامدين أوجد ل

⑦ اثبت أن Δ أ ب جـ قائم الزاوية حيث أ(2 ، -1 ، 1) ، ب(1 ، -3 ، -5) ، جـ(3 ، -4 ، -4)

⑧ اذا كان (أ + ب) . (أ - ب) = 8 ، ||أ|| = 3 ||ب|| أوجد ||أ|| ، ||ب||

⑨ اذا كان أ = س + ص - 2 ع ، ب = 3 س + 2 ص - ع أوجد: (أ + 3 ب) . (2 أ - ب)

⑩ أثرت قوة ق = س - 2 ص + 3 ع نيوتن في جسم فحركته من نقطة أ(-3 ، 1 ، 0) إلى نقطة ب(2 ، 0 ، -2) أوجد الشغل المبذول من القوة ق حيث الإزاحة مقدرة بالمتر.

الضرب الاتجاهي والثلاثي القياسي

تعريف حاصل الضرب الاتجاهي:

اذا كان $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجهين غير صفريين ،

θ قياس الزاوية الصغرى التي يحصرها هذان المتجهان عند رسمهما خارجين من نقطة واحدة فإن حاصل الضرب الاتجاهي للمتجه $\vec{أ}$ في المتجه $\vec{ب}$ يرمز له بالرمز $\vec{أ} \times \vec{ب}$ ويعرف كالآتي:

$$\vec{أ} \times \vec{ب} = \|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\| \, جا\,\theta \; \vec{ى}$$

حيث $\vec{ى}$ متجه وحدة عمودي على المستوى الذي يجمع المتجهين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$

ملاحظات:

① $\vec{أ} \times \vec{ب} = -\vec{ب} \times \vec{أ}$ غير إبدالي

② $\|\vec{أ} \times \vec{ب}\| = \|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\| \, جا\,\theta$

، $جا\,\theta = \dfrac{\|\vec{أ} \times \vec{ب}\|}{\|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\|}$

③ متجه الوحدة في اتجاه $\vec{أ} \times \vec{ب}$ هو

$$\vec{ى} = \frac{\vec{أ} \times \vec{ب}}{\|\vec{أ} \times \vec{ب}\|} = \frac{\vec{أ} \times \vec{ب}}{\|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\| \, جا\,\theta}$$

④ اذا كان $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{جـ}$ ثلاثة متجهات غير صفرية وكان $\vec{أ} \times \vec{ب} = \vec{أ} \times \vec{جـ}$ فهذا لا يعني بالضرورة أن $\vec{ب} = \vec{جـ}$

•• خواص الضرب الاتجاهي لمتجهين:

① $\vec{أ} \times \vec{ب} = -\vec{ب} \times \vec{أ}$

② $\vec{أ} \times (\vec{ب} + \vec{جـ}) = \vec{أ} \times \vec{ب} + \vec{أ} \times \vec{جـ}$

③ $(ك\,\vec{أ}) \times \vec{ب} = \vec{أ} \times (ك\,\vec{ب}) = ك\,(\vec{أ} \times \vec{ب})$

④ $\vec{أ} \times \vec{أ} = \vec{ب} \times \vec{ب} = \vec{0}$ أي أن ناتج الضرب الاتجاهي لمتجه في نفسه = صفر

⑤ اذا كان $\vec{أ} \times \vec{ب} = \vec{0}$ فإن $\vec{أ} = \vec{ب}$ أو أحد المتجهين أو كلاهما $= \vec{0}$

⑥ $\hat{س} \times \hat{س} = \hat{ص} \times \hat{ص} = \hat{ع} \times \hat{ع} = \vec{0}$

⑦ $\hat{س} \times \hat{ص} = \hat{ع}$ ، $\hat{ص} \times \hat{ع} = \hat{س}$ ، $\hat{ع} \times \hat{س} = \hat{ص}$ بينما $\hat{ص} \times \hat{س} = -\hat{ع}$ ، $\hat{ع} \times \hat{ص} = -\hat{س}$ ، $\hat{س} \times \hat{ع} = -\hat{ص}$

•• الضرب الاتجاهي لمتجهين في الصورة الكارتيزية:

$$\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \hat{س} & \hat{ص} & \hat{ع} \\ أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \end{vmatrix}$$

•• توازي متجهين:

اذا كان $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجهين غير صفريين وكان

① $\vec{أ} \times \vec{ب} = \vec{0}$ فإن $\vec{أ} \parallel \vec{ب}$ والعكس صحيح

②

③ $\dfrac{أ_س}{ب_س} = \dfrac{أ_ص}{ب_ص} = \dfrac{أ_ع}{ب_ع}$ فإن $\vec{أ} \parallel \vec{ب}$ والعكس صحيح

③ $\vec{أ} = ك\,\vec{ب}$ ∴ $\vec{أ} \parallel \vec{ب}$ وفي حالة ك > صفر تكون $\vec{أ} \parallel \vec{ب}$ وفي نفس الاتجاه ، ك < صفر تكون $\vec{أ} \parallel \vec{ب}$ وفي عكس الاتجاه

ملاحظة: اذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة نقاط في الفراغ ثلاثي الأبعاد وكان $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{بجـ} = \vec{0}$ فإن النقط أ ، ب ، جـ تكون على استقامة واحدة

•• المعنى الهندسي لمعيار الضرب الاتجاهي:

من تعريف الضرب الاتجاهي

$\|\vec{أ} \times \vec{ب}\| = \|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\| \, جا\theta$

$= \|\vec{ب}\| \times ل$

حيث $ل = \|\vec{أ}\| \, جا\theta$

∴ $\|\vec{أ} \times \vec{ب}\|$ = مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\vec{ب}$ ، $\vec{أ}$ ضلعان متجاوران = ضعف مساحة △ الذي فيه $\vec{ب}$ ، $\vec{أ}$ ضلعان

•• الضرب الثلاثي القياسي:

اذا كان $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{جـ}$ متجهات في الفراغ ثلاثي الأبعاد فإن حاصل الضرب الثلاثي القياسي هو $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{جـ}$ حيث

$$\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{جـ} = \begin{vmatrix} أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \\ جـ_س & جـ_ص & جـ_ع \end{vmatrix}$$

خواص الضرب الثلاثي القياسي:

① قيمة الضرب الثلاثي القياسي لا تتغير اذا تم تبديل المتجهات مع احتفاظهم بنفس الترتيب الدوري أي أن

$\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{جـ} = \vec{ب} \cdot \vec{جـ} \times \vec{أ}$

$= \vec{جـ} \cdot \vec{أ} \times \vec{ب}$

② يمكن تبديل علامتي الضرب القياسي والاتجاهي مع الحفاظ على الترتيب الدوري للمتجهات دون أن تتغير قيمة حاصل الضرب الثلاثي القياسي أي أن

$\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{جـ} = \vec{أ} \times \vec{ب} \cdot \vec{جـ}$

③ اذا كانت المتجهات $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{جـ}$ في مستوى واحد فإن حاصل الضرب الثلاثي القياسي لهم ينعدم أي أن

$\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{جـ}$ = صفر

④ اذا كان $\vec{أب} \cdot \vec{أجـ} \times \vec{أد}$ = صفر فإن النقاط أ ، ب ، جـ ، د في مستوى واحد

المعنى الهندسي لحاصل الضرب الثلاثي القياسي هو أن حجم متوازي السطوح = القيمة المطلقة لحاصل الضرب الثلاثي القياسي أي أن

حجم متوازي السطوح = $|\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{جـ}|$

- أمثلة محلولة -

① $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجهان في مستوى ، قياس الزاوية بينهما $70°$ فإذا كان $\|\vec{أ}\| = 10$ ، $\|\vec{ب}\| = 17{,}5$ أوجد معيار $\vec{أ} \times \vec{ب}$

- الحل -

$\|\vec{أ} \times \vec{ب}\| = \|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\| \, جا\theta$

$= 17{,}5 \times 10$ جا $70 = 78{,}28$

② اذا كان $\|\vec{أ}\| = 5$ ، $\|\vec{ب}\| = 8{,}5$ ، $\theta = 30°$ ، $\vec{ي}$ متجه وحدة عمودي على كل من $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ أوجد $\vec{أ} \times \vec{ب}$

- الحل -

$\vec{أ} \times \vec{ب} = \|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\| \, جا\theta \, (\pm \vec{ي})$

$= \pm 5 \times 8{,}5$ جا $30 = \pm 21{,}25 \, \vec{ي}$

③ اذا كان $\vec{أ} \times \vec{ب} = -65 \vec{ي}$ وكان $\|\vec{أ}\| = 5$ ، $\|\vec{ب}\| = 26$ أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$

- الحل -

∵ $\|\vec{أ} \times \vec{ب}\| = \|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\| \, جا\theta$

$\because 65 = 5 \times 26$ جا θ $\therefore$ جا $\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \theta = 30^\circ$ أو 150°

④ $أ ب جـ د$ مربع طول ضلعه 12 سم ، $\overline{ى}$ متجه وحدة عمودي على مستواه لأعلى أوجد

① $\overline{أب} \times \overline{أجـ}$ ② $\overline{ب د} \times \overline{أجـ}$

③ $\overline{أب} \times \overline{ب جـ}$

- الحل -

(شكل: مربع أ ب جـ د طول ضلعه 12)

① $\overline{أب} \times \overline{أجـ} = \|\overline{أب}\| \, \|\overline{أجـ}\|$ جا $45 \, \overline{ى}$

$= 12 \times 12\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{ى} = 144 \overline{ى}$

② $\overline{ب د} \times \overline{أجـ} = \|\overline{ب د}\| \, \|\overline{أجـ}\|$ جا $90 \, \overline{ى}$

$= 12\sqrt{2} \times 12\sqrt{2} \times 1 \, \overline{ى}$

$= 288 \, \overline{ى}$

③ $\overline{أب} \times \overline{ب جـ} = \|\overline{أب}\| \, \|\overline{ب جـ}\|$ جا $90 \times (-\overline{ى})$

$= -12 \times 12 \times 1 \, \overline{ى} = -144 \, \overline{ى}$

⑤ أوجد $\overline{أ} \times \overline{ب}$ في كل من الحالات الآتية:

① $\|\overline{أ}\| = 6$ ، $\|\overline{ب}\| = 8$ ،
قياس الزاوية بينهما 60

- الحل -

$\overline{أ} \times \overline{ب} = \|\overline{أ}\| \, \|\overline{ب}\|$ جا $\theta \, \overline{ى}$

$= 6 \times 8$ جا $60 \, \overline{ى} = 24\sqrt{3} \, \overline{ى}$

② $\overline{أ} = (-2، 3، 1)$ ، $\overline{ب} = (1، 3، -4)$

- الحل -

$$\overline{أ} \times \overline{ب} = \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$\therefore \overline{أ} \times \overline{ب} = (-12-3)\overline{س} - (8-1)\overline{ص} + (-6-3)\overline{ع}$

$= -15\overline{س} - 7\overline{ص} - 9\overline{ع}$

③ $\overline{أ} = -\overline{س} - 2\overline{ص}$ ، $\overline{ب} = 3\overline{ص} - 5\overline{ع}$

- الحل -

$$\overline{أ} \times \overline{ب} = \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$= (10-0)\overline{س} - (5-0)\overline{ص} + (-3-0)\overline{ع}$

$= 10\overline{س} - 5\overline{ص} - 3\overline{ع}$

⑥ أوجد متجه وحدة عمودياً على كل من $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ حيث $\overline{أ} = 4\overline{س} - 6\overline{ص} + 2\overline{ع}$ ،
$\overline{ب} = -2\overline{س} + 4\overline{ص} - 6\overline{ع}$

- الحل -

$$\overline{أ} \times \overline{ب} = \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ 4 & -6 & 2 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix}$$

$= (36-8)\overline{س} - (-24+4)\overline{ص} + (16-12)\overline{ع}$

$= 28\overline{س} + 20\overline{ص} + 4\overline{ع}$

$\therefore \|\overline{أ} \times \overline{ب}\| = 20\sqrt{3}$

$\therefore \overline{ى} = \pm \frac{\overline{أ} \times \overline{ب}}{\|\overline{أ} \times \overline{ب}\|}$

$= \pm \left(\frac{7\sqrt{3}}{15}\overline{س} + \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{ص} + \frac{\sqrt{3}}{15}\overline{ع} \right)$

⑦ إذا كان $\overline{أ} = \overline{س} + \overline{ص} - 2\overline{ع}$ ، $\overline{ب} = 3\overline{س} - 2\overline{ص} + 5\overline{ع}$ أوجد

① $\overline{أ} \times \overline{ب}$ ② $2\overline{أ} \times 3\overline{ب}$

③ $\overline{أ} \times (\overline{أ} - 2\overline{ب})$

- الحل -

① $\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

$= (5-4)\,\text{س} - (5+6)\,\text{ص} + (-2-3)\,\text{ع}$

$= \text{س} - 11\,\text{ص} - 5\,\text{ع}$

② $2\vec{\text{أ}} \times 3\vec{\text{ب}} = 6(\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}})$

$= 6\,\text{س} - 66\,\text{ص} - 30\,\text{ع}$

③ $\vec{\text{أ}} \times (\vec{\text{أ}} - 2\vec{\text{ب}}) = \vec{\text{أ}} \times \vec{\text{أ}} - 2\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}$

$= \vec{0} - 2(\text{س} - 11\,\text{ص} - 5\,\text{ع})$

$= -2\,\text{س} + 22\,\text{ص} + 10\,\text{ع}$

⑧ أوجد جيب الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{\text{أ}} = 3\,\text{س} - 4\,\text{ص} + 5\,\text{ع}$ ، $\vec{\text{ب}} = \text{س} - \text{ص} + \text{ع}$

- الحل -

$\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (-4+5)\,\text{س} - (3-5)\,\text{ص} + (-3+4)\,\text{ع}$

$= \text{س} + 2\,\text{ص} + \text{ع}$

$\|\vec{\text{أ}}\| = 5\sqrt{2}$ ، $\|\vec{\text{ب}}\| = \sqrt{3}$

، $\|\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}\| = \sqrt{6}$

$\therefore \text{جا}\,\theta = \dfrac{\|\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}\|}{\|\vec{\text{أ}}\|\,\|\vec{\text{ب}}\|} = \dfrac{\sqrt{6}}{5\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \dfrac{1}{5}$

⑨ إذا كان $\vec{\text{أ}} = 7\,\text{س} - 2\,\text{ص} + 3\,\text{ع}$ ، $\vec{\text{ب}} = 2\,\text{س} + 8\,\text{ع}$ ، $\vec{\text{جـ}} = \text{س} + \text{ص} + \text{ع}$

أوجد $\vec{\text{أ}} \times (\vec{\text{ب}} + \vec{\text{جـ}})$

- الحل -

$\vec{\text{ب}} + \vec{\text{جـ}} = (2, 0, 8) + (1, 1, 1)$

$= (3, 1, 9)$

$\therefore \vec{\text{أ}} \times (\vec{\text{ب}} + \vec{\text{جـ}}) = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ 7 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

$= (-18-3)\,\text{س} - (63-9)\,\text{ص} + (7+6)\,\text{ع}$

$= -21\,\text{س} - 54\,\text{ص} + 13\,\text{ع}$

⑩ إذا كان $\|\vec{\text{أ}}\| = 6$ ، وكانت جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{\text{أ}}$ هي على الترتيب $\frac{2}{3}$ ، $\frac{-2}{3}$ ، $\frac{1}{3}$ وكان المتجه $\vec{\text{ب}} = (-2, 3, 5)$ أوجد $\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}$

- الحل -

$\vec{\text{أ}} = \|\vec{\text{أ}}\| \times \text{ى}_{\text{أ}} = 6\left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\therefore \vec{\text{أ}} = (4, -4, 2)$

$\therefore \vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ 4 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

$= (-20-6)\,\text{س} - (20+4)\,\text{ص} + (12-8)\,\text{ع}$

$= -26\,\text{س} - 24\,\text{ص} + 4\,\text{ع}$

⑪ إذا كان أ(0، 0، 1) ، ب(1، 0، 0) ، جـ(0، 1، 0) أوجد متجه وحدة عمودي على المستوى أ ب جـ

- الحل -

$\overrightarrow{\text{أب}} = \text{ب} - \text{أ} = (1, 0, 0) - (0, 0, 1) = (1, 0, -1)$

$\overrightarrow{\text{ب جـ}} = \text{جـ} - \text{ب} = (0, 1, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 0)$

$\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= (0+1)\,\text{س} - (0-1)\,\text{ص} + (1-0)\,\text{ع}$

∴ أب × بج = س + ص + ع

∴ || أب × بج || = √٣

∴ ن = ± (١ ، ١ ، ١) / √٣ = ± (١/√٣ ، ١/√٣ ، ١/√٣)

(١٢) أوجد المتجه الذى معياره ٣ وحدات وعمودى على كل من المتجهين
أ = ٣ س + ص − ٤ ع ، ب = ٦ س + ٥ ص − ٢ ع

- الحل -

أ × ب =
س	ص	ع
٣	١	−٤
٦	٥	−٢

= (−٢ + ٢٠) س − (−٦ + ٢٤) ص + (١٥ − ٦) ع
= ١٨ س − ١٨ ص + ٩ ع

|| أ × ب || = ٢٧

∴ ن = ± (١٨ ، −١٨ ، ٩) / ٢٧ = ± (٢/٣ ، −٢/٣ ، ١/٣)

∴ المتجه هو = ± ٣ (٢/٣ ، −٢/٣ ، ١/٣)
= ± (٢ ، −٢ ، ١)

(١٣) اذا كان أ = −٣ س + ٤ ص − ٧ ع ، ب = ٦ س + ٢ ص − ٣ ع اثبت أن أ × ب عمودياً على ب باستخدام الضرب الثلاثى القياسى

- الحل -

∴ ب . (أ × ب) =
٦	٢	−٣
−٣	٤	−٧
٦	٢	−٣

= ٦ (−١٢ + ١٤) − ٢ (٩ + ٤٢) − ٣ (−٦ − ٢٤)
= ٦ × ٢ − ٢ × ٥١ − ٣ × −٣٠ = صفر

∴ ب ⊥ أ × ب

(١٤) أوجد ل ، م اذا كان
(٢ س + ٦ ص − ٢٧ ع) × (س + ل ص + م ع) = و

- الحل -

س	ص	ع
٢	٦	−٢٧
١	ل	م

= و

∴ (٦ م + ٢٧ ل) س − (٢ م + ٢٧) ص + (٢ ل − ٦) ع = و

∴ ٢ ل − ٦ = صفر ∴ ل = ٣
، ٢ م + ٢٧ = صفر ∴ م = −٢٧/٢

(١٥) احسب مساحة متوازى الأضلاع ل م ن هـ اذا كان

① ل (١ ، ١) ، م (٢ ، ٣) ، ن (٥ ، ٤)

- الحل -

ل م = م − ل = (١ ، ٢)
، ن م = م − ن = (−٣ ، −١)

∴ ل م × ن م = (١ ، ٢) × (−٣ ، −١)
= (−١ + ٦) ع = ٥ ع

∴ مساحة متوازى الأضلاع = || ل م × ن م ||
= ٥ وحدة مساحة

② ل (٢ ، ١ ، ٣) ، م (١ ، ٤ ، ٥) ، ن (٢ ، ٥ ، ٣)

- الحل -

ل م = م − ل = (−١ ، ٣ ، ٢)
، ن م = م − ن = (−١ ، −١ ، ٢)

∴ ل م × ن م =
س	ص	ع
−١	٣	٢
−١	−١	٢

= (٦ + ٢) س − (−٢ + ٢) ص + (١ + ٣) ع
= ٨ س + ٤ ع

∴ مساحة متوازى الأضلاع = || ل م × ن م ||
= √(٨² + ٤²) = ٤√٥ وحدة مساحة

⑯ أوجد مساحة Δ أ ب جـ حيث
أ(٥ ، ١ ، -٢) ، ب(٤ ، -٤ ، ٣) ، جـ(٢ ، ٤ ، صفر)

- الحل -

$\overrightarrow{أب}$ = ب - أ = (-١ ، -٥ ، ٥)
، $\overrightarrow{أجـ}$ = جـ - أ = (-٣ ، ٣ ، ٢)

∴ $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ}$ = | $\overrightarrow{س}$ $\overrightarrow{ص}$ $\overrightarrow{ع}$ ؛ -١ -٥ ٥ ؛ -٣ ٣ ٢ |

= (-١٠ - ١٥) $\overrightarrow{س}$ - (-٢ + ١٥) $\overrightarrow{ص}$ + (-٣ - ١٥) $\overrightarrow{ع}$
= -٢٥ $\overrightarrow{س}$ - ١٣ $\overrightarrow{ص}$ - ١٨ $\overrightarrow{ع}$

∴ مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ ‖ $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ}$ ‖

= $\frac{1}{2}\sqrt{(-25)^2 + (-13)^2 + (-18)^2}$ = ١٦٫٧ وحدة مساحة

⑰ اذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (-٣ ، ١ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، ٤ ، -١) أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان متجاوران

- الحل -

$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ = | $\overrightarrow{س}$ $\overrightarrow{ص}$ $\overrightarrow{ع}$ ؛ -٣ ١ ٢ ؛ ٣ ٤ -١ |

= (-١ - ٨) $\overrightarrow{س}$ - (٣ - ٦) $\overrightarrow{ص}$ + (-١٢ - ٣) $\overrightarrow{ع}$
= -٩ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ - ١٥ $\overrightarrow{ع}$

∴ مساحة متوازي الأضلاع = ‖ $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ ‖
= $\sqrt{81 + 9 + 225}$ = ٣ $\sqrt{35}$ وحدة مساحة

⑱ اثبت أن النقاط أ(٥ ، ٦ ، ٧) ، ب(٧ ، -٨ ، ٩) ، جـ(٣ ، ٢ ، ٥) على استقامة واحدة

- الحل -

$\overrightarrow{أب}$ = ب - أ = (٢ ، -١٤ ، ٢)
$\overrightarrow{أجـ}$ = جـ - أ = (-٢ ، ١٤ ، -٢)

∴ $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ}$ = | $\overrightarrow{س}$ $\overrightarrow{ص}$ $\overrightarrow{ع}$ ؛ ٢ -١٤ ٢ ؛ -٢ ١٤ -٢ |

= (٢٨ - ٢٨) $\overrightarrow{س}$ - (-٤ + ٤) $\overrightarrow{ص}$ + (٢٨ - ٢٨) $\overrightarrow{ع}$
= $\overrightarrow{0}$

∴ النقط أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة

حل آخر : ∵ $\overrightarrow{أب}$ = (٢ ، -١٤ ، ٢)
، $\overrightarrow{أجـ}$ = (-٢ ، ١٤ ، -٢)

∴ $\frac{٢}{-٢} = \frac{-١٤}{١٤} = \frac{٢}{-٢}$ = -١

∴ النقط على استقامة واحدة

⑲ اذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، ٦ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (ل ، ٣ ، م) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (ل ، م ، ل+م) وكان $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$
أوجد ‖ $\overrightarrow{جـ}$ ‖

- الحل -

∵ $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ ∴ $\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$

∴ $\frac{١}{ل} = \frac{٦}{٣} = \frac{٢}{م}$

∴ ل = $\frac{1}{2}$ ، م = ١

∴ ‖ $\overrightarrow{جـ}$ ‖ = $\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (1)^2 + (\frac{3}{2})^2}$ = $\frac{\sqrt{14}}{2}$

⑳ اذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، ٣ ، ٠) ، $\overrightarrow{ب}$ = (م ، ٢ ، صفر) فعين قيمة م في كل من الحالات الآتية :
① $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ = -٥ $\overrightarrow{ع}$ ② $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$
③ قياس الزاوية بين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = ٤٥°

- الحل -

① أ × ب = | س ص ع ; ٢ ٣ صفر ; م ٢ صفر |

= (٠ − ٠) س − (٠ − ٠) ص + (٤ − ٣م) ع

= (٤ − ٣م) ع   ∵ أ × ب = −٥ ع

∴ (٤ − ٣م) ع = −٥ ع

∴ ٤ − ٣م = −٥   ∴ ٣م = ٩

∴ م = ٣

② ∵ أ ⊥ ب   ∴ أ . ب = صفر

∴ (٢ ، ٣ ، ٠) . (م ، ٢ ، ٠) = صفر

∴ ٢م + ٦ = صفر   ∴ م = −٣

③ ∵ جا θ = ‖أ × ب‖ / (‖أ‖ ‖ب‖)

∴ ١/√٢ = (٤ − ٣م) / (√١٣ √(م² + ٤))

∴ √٢ (٤ − ٣م) = √١٣ √(م² + ٤)

وبالتربيع

∴ ٢ (٤ − ٣م)² = ١٣ (م² + ٤)

∴ ٢ (١٦ − ٢٤م + ٩م²) = ١٣م² + ٥٢

∴ ٣٢ − ٤٨م + ١٨م² = ١٣م² + ٥٢

∴ ٥م² − ٤٨م − ٢٠ = صفر   وبالتحليل

∴ م = ١٠ ، م = −٢/٥

(٢١) اذا كان أ = (٢ ، −٣) وكان ب // أ فإذا كان ‖ب‖ = ٣√١٣ أوجد ب

-الحل-

‖أ‖ = √(٤ + ٩) = √١٣

ى_أ = (٢ ، −٣)/√١٣ = ١/√١٣ (٢ ، −٣) ، ∵ ب // أ

∴ ب = ‖ب‖ × ± ى_أ

= ٣√١٣ × ± ١/√١٣ (٢ ، −٣)

∴ ب = ± (٦ ، −٩)

(٢٢) أوجد أ . ب × ج اذا كان أ = س − ٢ص + ٣ع ، ب = ٢س − ٣ص + ع ، ج = ٣س + ص − ٢ع

-الحل-

أ . ب × ج = | ١ −٢ ٣ ; ٢ −٣ ١ ; ٣ ١ −٢ |

= ١(٦ − ١) + ٢(−٤ − ٣) + ٣(٢ + ٩)

= ٥ − ١٤ + ٣٣ = ٢٤

(٢٣) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أضلاع متجاورة يمثلها المتجهات أ = (١ ، −١ ، ٢) ، ب = (٣ ، −٢ ، صفر) ، ج = (صفر ، ٢ ، ٤)

-الحل-

حجم متوازي السطوح = |أ . ب × ج|

∵ أ . ب × ج = | ١ −١ ٢ ; ٣ −٢ صفر ; صفر ٢ ٤ | = ١٦

∴ حجم متوازي السطوح = |١٦| = ١٦ وحدة حجم

(٢٤) اذا كان حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أحرف متجاورة ممثلة بالمتجهات (−١٢س + ل ع) ، (٣ص − ع) ، (٢س + ص − ١٥ع) هو ٥٤٦ أوجد ل

-الحل-

∵ $\begin{vmatrix} -12 & \text{صفر} & \text{ل} \\ \text{صفر} & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -15 \end{vmatrix}$ = ٥٢٨ − ٦ل

∴ حجم متوازي السطوح = |٥٢٨ − ٦ل|

∴ |٥٢٨ − ٦ل| = ٥٤٦

∴ إما ٥٢٨ − ٦ل = ٥٤٦ ∴ ل = ١٧٩

أو ٥٢٨ − ٦ل = −٥٤٦ ∴ ل = −٣

(٢٥) أثبت أن المتجهات أ = س − ٢ص + ٣ع ، ب = −٢س + ٣ص − ٤ع ، جـ = س − ٣ص + ٥ع تقع في مستوى واحد

- الحل -

∵ أ ، ب ، جـ متجهات غير صفرية

، أ . ب × جـ = $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ = صفر

∴ أ ، ب ، جـ تقع في نفس المستوى

(٢٦) أوجد قيمة ل لكي تصبح المتجهات أ (١ ، −١ ، ١) ، ب (٣ ، ١ ، ٢) ، جـ (١ ، ل ، −٣) في مستوى واحد

- الحل -

∵ أ ، ب ، جـ في مستوى واحد

∴ أ . ب × جـ = صفر

∴ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & \text{ل} & -3 \end{vmatrix}$ = صفر

= ١(−٣ − ٢ل) + ١(−٩ − ٢) + ١(٣ل − ١) = صفر

∴ −٣ − ٢ل − ١١ + ٣ل − ١ = صفر

∴ ل − ١٥ = صفر ∴ ل = ١٥

(٢٧) أوجد ك التي تجعل النقاط أ ، ب ، جـ ، د تقع في نفس المستوى حيث أ(٣ ، −٢ ، −١) ، ب(٢ ، ٣ ، −٤) ، جـ(−١ ، ١ ، ٢) ، د(٤ ، ٥ ، ك)

- الحل -

∵ أب = ب − أ = (−١ ، ٥ ، −٣)

، أجـ = جـ − أ = (−٤ ، ٣ ، ٣)

، أد = د − أ = (١ ، ٧ ، ك + ١)

∵ أ ، ب ، جـ ، د في مستوى واحد

∴ أب . أجـ × أد = صفر

∴ $\begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ -4 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & \text{ك}+1 \end{vmatrix}$ = صفر

∴ −١(٣ك + ٣ − ٢١) − ٥(−٤ك − ٤ − ٣) − ٣(−٢٨ − ٣) = صفر

∴ −(٣ك − ١٨) − ٥(−٤ك − ٧) − ٣ × −٣١ = صفر

∴ −٣ك + ١٨ + ٢٠ك + ٣٥ + ٩٣ = صفر

∴ ١٧ك + ١٤٦ = صفر ∴ ك = $\frac{-146}{17}$

(٢٨) إذا كان أ ، ب متجهي وحدة في ح^3 تحت أي شرط يكون حاصل الضرب الاتجاهي أ × ب يمثل متجه وحدة في ح^3 (فسر إجابتك)

- الحل -

∵ أ × ب متجه وحدة ∴ ||أ × ب|| = ١

∵ ||أ|| ||ب|| جا θ = ١ ∴ جا θ = ١

∴ θ = ٩٠° ، أ ⊥ ب

صابر عبد الرحيم محمود

(29) برهن كلاً مما يأتي حيث أ ، ب ∈ ح³

① ‖أ × ب‖² + |أ · ب|² = ‖أ‖² ‖ب‖²

② إذا كان أ · ب = صفر ، أ × ب = 0 فإن إما أ = 0 أو ب = 0

-الحل-

① ‖أ × ب‖² + |أ · ب|²

= ‖أ‖² ‖ب‖² جا²θ + ‖أ‖² ‖ب‖² جتا²θ

= ‖أ‖² ‖ب‖² (جا²θ + جتا²θ)

= ‖أ‖² ‖ب‖² = الأيسر

② إذا كان أ · ب = صفر فإن

أ ⊥ ب أو أحدهما = 0

وإذا كان أ × ب = 0 فإن

أ // ب أو أحدهما = 0

∵ لا يمكن أن يكون أ ⊥ ب ، أ // ب في نفس الوقت

∴ أ = 0 أو ب = 0

(30) اثبت أن

(أ − ب) × (أ + ب) = 2(أ × ب)

-الحل-

الطرف الأيمن = (أ − ب) × (أ + ب)

= أ × أ + أ × ب − ب × أ − ب × ب

= 0 + أ × ب + أ × ب − 0

= 2 أ × ب = الطرف الأيسر

(31) إذا كان أ × ب = جـ × د ،

أ × جـ = ب × د اثبت أن المتجه (أ − د) ، المتجه (ب − جـ) متوازيان

حيث أ ، ب ، جـ ، د متجهات ليست صفرية

-الحل-

(أ − د) × (ب − جـ)

= أ × ب − أ × جـ − د × ب + د × جـ

= جـ × د − ب × د + ب × د − جـ × د

= 0

∴ المتجه (أ − د) يوازي المتجه (ب − جـ)

- تمارين عامة -

① أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = 3 سم ، ب جـ = 4 سم تتقاطع قطراه في م ، ي متجه وحدة عمودي على مستواه لأعلى أوجد:

① أ ب × أ جـ　　② أ د × ب جـ

③ جـ م × جـ ب　　④ أ ب × جـ ب

② أوجد متجه وحدة عمودي على كل من أ ، ب حيث أ = س − 2ص + 2ع ،

ب = 3س − 4ص

③ إذا كان أ = 4س + 3ص + ع ،

ب = س − 2ع أوجد ‖2ب × أ‖

④ احسب مساحة متوازي الأضلاع ل م ن هـ

حيث ل(3 ، −1 ، 2) ، م(1 ، −1 ، −3)

، ن(4 ، −3 ، 1)

⑤ احسب مساحة Δ أ ب جـ حيث

أ(4 ، 0 ، 2)　ب(2 ، 1 ، 5)　جـ(−1 ، 0 ، −1)

⑥ إذا كان المتجه أ = 2س − 3ص + م ع

يوازي المتجه ب = س + ل ص + 8ع

أوجد قيمة كل من م ، ل

⑦ إذا كان $\vec{\text{أ}} = 2\,\hat{\text{س}} + \hat{\text{ص}} + 3\,\hat{\text{ع}}$ ،
$\vec{\text{ب}} = -\hat{\text{س}} + 2\,\hat{\text{ص}} + \hat{\text{ع}}$ ،
$\vec{\text{جـ}} = 3\,\hat{\text{س}} + \hat{\text{ص}} + 2\,\hat{\text{ع}}$ أوجد $\vec{\text{ب}} \cdot \vec{\text{جـ}} \times \vec{\text{أ}}$

⑧ إذا كان $\vec{\text{أ}} = 2\,\hat{\text{س}} + 3\,\hat{\text{ص}} - \hat{\text{ع}}$ ،
$\vec{\text{ب}} = -\hat{\text{س}} + 2\,\hat{\text{ص}} - 4\,\hat{\text{ع}}$ ،
$\vec{\text{جـ}} = \hat{\text{س}} + \hat{\text{ص}} + \hat{\text{ع}}$ أوجد
$(\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}) \cdot (\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{جـ}})$

⑨ أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أحرف غير متوازية تمثلها المتجهات $\vec{\text{أ}} = (3 ، -4 ، 1)$ ، $\vec{\text{ب}} = (0 ، 2 ، -3)$ ، $\vec{\text{جـ}} = (3 ، 2 ، 2)$

⑩ إذا كانت أ(٤ ، ٨ ، ١٢) ، ب(٢ ، ٤ ، ٦) ، جـ(٣ ، ٥ ، ٤) ، د(٥ ، ٨ ، ٥) اثبت أن النقاط أ ، ب ، جـ ، د تقع في مستوى واحد

⑪ أوجد قيمة

$$\frac{\|\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}\|^2 + |\vec{\text{أ}} \cdot \vec{\text{ب}}|^2}{2\,\|\vec{\text{أ}}\|^2\,\|\vec{\text{ب}}\|^2}$$

⑫ اثبت بالمتجهات أنه لأي مثلث أ ب جـ يكون

$$\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا جـ}}$$

معادلة المستقيم في الفراغ

•• متجه اتجاه المستقيم في الفراغ :

نعلم أن زوايا الاتجاه لأي مستقيم في الفراغ يمر بنقطة الأصل هي قياسات الزوايا التي يصنعها هذا المستقيم مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات .

ولإيجاد زوايا الاتجاه لأي مستقيم في الفراغ لا يمر بنقطة الأصل نرسم مستقيماً يوازيه ويمر بنقطة الأصل ونحسب زوايا الاتجاه له

ومن الشكل المقابل :

فإن $\theta_س$ ، $\theta_ص$ ، $\theta_ع$ هي زوايا اتجاه المستقيم في الفراغ

،

حتا $\theta_س$ ، حتا $\theta_ص$ ، حتا $\theta_ع$ هي جيوب تمام الاتجاه لهذا المستقيم ويرمز لها بالرموز ل ، م ، ن على الترتيب حيث

ل = حتا $\theta_س$ م = حتا $\theta_ص$

ن = حتا $\theta_ع$

والمتجه $\overrightarrow{ى} = ل\,\overrightarrow{س} + م\,\overrightarrow{ص} + ن\,\overrightarrow{ع}$ هو متجه وحدة في اتجاه المستقيم ،

$ل^2 + م^2 + ن^2 = 1$

• متجه الاتجاه للمستقيم هو أي متجه يوازي متجه الوحدة في اتجاه المستقيم ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{ى}$ حيث

$\overrightarrow{ى} = ك\,\overrightarrow{ى} = ك(ل\,\overrightarrow{س} + م\,\overrightarrow{ص} + ن\,\overrightarrow{ع})$

حيث ك ∈ ح*

∴ يمكن كتابته $\overrightarrow{ى} = (أ ، ب ، جـ)$ حيث

أ = ك ل ، ب = ك م ، جـ = ك ن

، ∴ أ ، ب ، جـ تتناسب مع ل ، م ، ن

فإن أ ، ب ، جـ تسمى نسب اتجاه المستقيم

مثال

إذا كانت زوايا الاتجاه لمستقيم في الفراغ هي ٦٠° ، ١٣٥° ، ٦٠° فإن

① $(\frac{1}{2} ، \frac{-1}{\sqrt{2}} ، \frac{1}{2})$ هي جيوب تمام الاتجاه للمستقيم

② $\overrightarrow{ى} = (\frac{1}{2} ، \frac{-1}{\sqrt{2}} ، \frac{1}{2})$ متجه وحدة في اتجاه المستقيم

③ $\overrightarrow{ى} = ك(\frac{1}{2} ، \frac{-1}{\sqrt{2}} ، \frac{1}{2})$ متجه اتجاه المستقيم حيث ك ∈ ح*

∴ لكل ك ∈ ح* يوجد متجه اتجاه للمستقيم أي أن : الخط المستقيم له عدد لا نهائي من متجهات الاتجاه المتوازية وكل منها يوازي هذا المستقيم

④ $\frac{1}{2}$ك ، $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ك ، $\frac{1}{2}$ك هي نسب الاتجاه للمستقيم

•• ملاحظات :

① إذا علمت نقطتان أ ، ب على المستقيم فإن متجه اتجاه المستقيم = $\overrightarrow{أب}$ = ب − أ

② المستقيم المار بنقطة الأصل وبالنقطة أ$(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ فإن $\overrightarrow{م} = (س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ هي متجه اتجاه المستقيم

③ (١ ، ٠ ، ٠) متجه اتجاه لمحور س ، (٠ ، ١ ، ٠) متجه اتجاه لمحور ص ، (٠ ، ٠ ، ١) متجه اتجاه لمحور ع

④ المستقيم الذى متجه اتجاهه $\vec{\text{ه}} = (\text{أ}، \text{ب}، ٠)$ يقع فى مستوى يوازى المستوى س ص وكذلك المستقيم الذى متجه اتجاهه $\vec{\text{ه}} = (\text{أ}، ٠، \text{جـ})$ يقع فى مستوى يوازى المستوى س ع ، والمستقيم الذى متجه اتجاهه $\vec{\text{ه}} = (٠، \text{ب}، \text{جـ})$ يقع فى مستوى يوازى المستوى ص ع

⑤ لاحظ الفرق بين جيوب تمام الاتجاه للمستقيم ونسب الاتجاه للمستقيم :

• ل ، م ، ن هى جيوب تمام الاتجاه للمستقيم حيث (ل ، م ، ن) هو متجه وحدة فى اتجاه المستقيم ، $\text{ل}^2 + \text{م}^2 + \text{ن}^2 = 1$

• أ ، ب ، جـ هى نسب اتجاه للمستقيم حيث (أ ، ب ، جـ) هو متجه اتجاه للمستقيم ، $(\text{أ}، \text{ب}، \text{جـ}) = \text{ك}(\text{ل}، \text{م}، \text{ن})$

• $(\text{ل}، \text{م}، \text{ن}) = \dfrac{(\text{أ}، \text{ب}، \text{جـ})}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2}}$

الصور المختلفة لمعادلة المستقيم فى الفراغ

اذا كان ل مستقيم فى الفراغ حيث $\text{أ}(\text{س}_1، \text{ص}_1، \text{ع}_1)$ نقطة معلومة عليه ، $\vec{\text{ه}} = (\text{أ}، \text{ب}، \text{جـ})$ متجه اتجاه له فإن

$$\vec{\text{ر}} = \vec{\text{أ}} + \text{ك}\,\vec{\text{ه}}$$

- $\vec{\text{ر}}$: متجه موضع أى نقطة على المستقيم
- $\vec{\text{أ}}$: متجه موضع نقطة على المستقيم
- ك : عدد حقيقى ≠ صفر
- $\vec{\text{ه}}$: متجه اتجاه المستقيم

وتسمى هذه الصورة المتجهة لمعادلة الخط المستقيم

$\therefore (\text{س}، \text{ص}، \text{ع}) = (\text{س}_1، \text{ص}_1، \text{ع}_1) + \text{ك}(\text{أ}، \text{ب}، \text{جـ})$

$\therefore \text{س} = \text{س}_1 + \text{ك}\,\text{أ}$ ، $\text{ص} = \text{ص}_1 + \text{ك}\,\text{ب}$ ، $\text{ع} = \text{ع}_1 + \text{ك}\,\text{جـ}$

وتسمى المعادلات البارامترية للخط المستقيم

$\therefore \text{ك} = \dfrac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}}$ ، $\text{ك} = \dfrac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}}$ ، $\text{ك} = \dfrac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{جـ}}$ أى أن

$$\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{جـ}}$$

وتسمى الصورة الاحداثية لمعادلة الخط المستقيم

ملاحظات :

① فى حالة أى أن أ = صفر مثلاً وحيث أن القسمة على صفر غير معرفة تكتب الصورة الاحداثية لمعادلة الخط المستقيم كالتالى

$\text{س} = \text{س}_1$ ، $\dfrac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}} = \dfrac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{جـ}}$

وهكذا فى حالة ب = صفر

$\dfrac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}} = \dfrac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{جـ}}$ ، $\text{ص} = \text{ص}_1$

وهكذا فى حالة جـ = صفر

$\dfrac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}} = \dfrac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}}$ ، $\text{ع} = \text{ع}_1$

② حيث أن نسب الاتجاه أ ، ب ، جـ تتناسب مع جيوب تمام الاتجاه ل ، م ، ن فإنه يمكن كتابة الصورة الاحداثية لمعادلة الخط المستقيم كالتالى

$$\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{ل}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{م}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{ن}}$$

③ معادلة المحور س هي
ص = صفر ، ع = صفر
ومعادلة المحور ص هي
س = صفر ، ع = صفر
ومعادلة المحور ع هي
س = صفر ، ص = صفر

④ معادلة أي مستقيم يوازي المحور س
ويمر بالنقطة $(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ هي
$ص = ص_١$ ، $ع = ع_١$

معادلة أي مستقيم يوازي المحور ص
ويمر بالنقطة $(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ هي
$س = س_١$ ، $ع = ع_١$

ومعادلة أي مستقيم يوازي المحور ع
ويمر بالنقطة $(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ هي
$س = س_١$ ، $ص = ص_١$

⑤ الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بنقطة الأصل ، متجه اتجاهه $(أ ، ب ، جـ)$ هي
$\vec{ر} = ك (أ ، ب ، جـ)$ الصورة الاتجاهية
$س = ك أ$ ، $ص = ك ب$ ، $ع = ك جـ$ المعادلات البارامترية
$\frac{س}{أ} = \frac{ص}{ب} = \frac{ع}{جـ}$ الصورة الكارتيزية

الزاوية بين مستقيمين في الفراغ
اذا كان $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمين في الفراغ متجها اتجاهيهما هو $\vec{ى}_١ = (أ_١ ، ب_١ ، جـ_١)$ ، $\vec{ى}_٢ = (أ_٢ ، ب_٢ ، جـ_٢)$ فإن جيب تمام الزاوية الصغرى بين المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ تعطى بالعلاقة

$$جتا \theta = \frac{|\vec{ى}_١ \cdot \vec{ى}_٢|}{\|\vec{ى}_١\| \|\vec{ى}_٢\|}$$

واذا كان $(ل_١ ، م_١ ، ن_١)$ ، $(ل_٢ ، م_٢ ، ن_٢)$ هي جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين فإن

$$جتا \theta = |ل_١ ل_٢ + م_١ م_٢ + ن_١ ن_٢|$$

المستقيمان المتوازيان في الفراغ
اذا كان $\vec{ى}_١ (أ_١ ، ب_١ ، جـ_١)$ ، $\vec{ى}_٢ (أ_٢ ، ب_٢ ، جـ_٢)$ هما متجها اتجاه المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ فإن $ل_١ // ل_٢$ اذا وفقط اذا كان $\vec{ى}_١ // \vec{ى}_٢$
وهذا الشرط يمكن تحققه بصور مختلفة
① $\vec{ى}_١ = ك \vec{ى}_٢$ حيث $ك \in ح^*$
② $\vec{ى}_١ \times \vec{ى}_٢ = \vec{و}$
③ $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$

ملاحظات :
① اذا توازى مستقيمان وكانت نقطة على أحدهما تحقق معادلة المستقيم الآخر فإن المستقيمين منطبقان
② اذا لم يحققا المستقيمان إحدى شروط التوازي السابقة فإن المستقيمين إما متقاطعان أو متخالفان

المستقيمان المتعامدان في الفراغ
اذا كان $\vec{ى}_١ = (أ_١ ، ب_١ ، جـ_١)$ ، $\vec{ى}_٢ = (أ_٢ ، ب_٢ ، جـ_٢)$ هما متجها اتجاه المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ فإن $ل_١ \perp ل_٢$ اذا وفقط

إذا كان $\hat{ه}_1 \cdot \hat{ه}_2 =$ صفر

أي أن

$ل_1 ل_2 + م_1 م_2 + ن_1 ن_2 =$ صفر

ويمكن استخدام جيوب تمام الاتجاه كمتجهات اتجاه للمستقيمين

ملاحظات:

① المستقيمان المتوازيان يجمعهما مستوى واحد

② المستقيمان المتقاطعان يجمعهما مستوى واحد

③ المستقيمان المتعامدان

أما أن يكونا متقاطعين مع التعامد وعندها يجمعهما مستوى واحد

وأما متخالفين وعندها لا يمكن أن يجمعهما مستوى واحد

④ في المستقيمين الغير متوازيين

$\vec{ر}_1 = (س_1 ، ص_1 ، ع_1) + ك_1 (ل_1 ، م_1 ، ن_1)$

$\vec{ر}_2 = (س_2 ، ص_2 ، ع_2) + ك_2 (ل_2 ، م_2 ، ن_2)$

(أ) إذا وجدت قيمة لكل من $ك_1 ، ك_2$ تحقق أن $\vec{ر}_1 = \vec{ر}_2$ فإن المستقيمين متقاطعان

(ب) إذا لم يوجد قيمة لكل من $ك_1 ، ك_2$ تحقق أن $\vec{ر}_1 = \vec{ر}_2$ فإن المستقيمين متخالفان

المسافة بين نقطة ومستقيم في الفراغ

نفرض مستقيم ل في الفراغ يمر بالنقطتين أ ، ب ومتجه اتجاهه $\vec{ه}$ فإنه لإيجاد بعد النقطة جـ في الفراغ عن المستقيم ل ولتكن جـ د حيث $\overline{جـ د} \perp \overleftrightarrow{أ ب}$ ، $د \in \overleftrightarrow{أ ب}$:

① نوجد $ب جـ = \| \vec{ب جـ} \|$

② نوجد ب د = مقياس مسقط $\vec{ب جـ}$ في اتجاه $\vec{ب أ}$ $= \frac{|\vec{ب جـ} \cdot \vec{ب أ}|}{\| \vec{ب أ} \|}$

③ نوجد البعد العمودي جـ د باستخدام نظرية فيثاغورس

ملاحظة: يمكن استخدام $\vec{ه}$ متجه اتجاه المستقيم بدلاً من $\vec{ب أ}$

ملاحظة: بعد النقطة أ $(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$

عن المحور س $= \sqrt{ص_1^2 + ع_1^2}$

عن المحور ص $= \sqrt{س_1^2 + ع_1^2}$

عن المحور ع $= \sqrt{س_1^2 + ص_1^2}$

- أمثلة محلولة -

① أوجد متجه اتجاه كل من المستقيمات الآتية:

① المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (-١ ، ٢ ، -٢)

- الحل -

ه = (-١ ، ٢ ، -٢) - (٠ ، ٠ ، ٠)
= (-١ ، ٢ ، -٢)

② المستقيم المار بالنقطتين ج(٠ ، -٢ ، ٣) ، د(١ ، ١ ، -١)

- الحل -

ه = ج د = د - ج = (١ ، ٣ ، -٤)

② أوجد جيوب تمام الاتجاه للمستقيم الذي نسب اتجاهه

① (-١ ، ٢ ، ٣) ② (١ ، ١ ، ١)

- الحل -

① أ = (-١ ، ٢ ، ٣)

∴ جيوب تمام أ = $\frac{\text{أ}}{\|\text{أ}\|} = \frac{(-١ ، ٢ ، ٣)}{\sqrt{١+٤+٩}}$

∴ جيوب تمام المستقيم = ± $\left(\frac{-١}{\sqrt{١٤}} ، \frac{٢}{\sqrt{١٤}} ، \frac{٣}{\sqrt{١٤}}\right)$

② ب (١ ، ١ ، ١)

∴ جيوب تمام ب = $\frac{\text{ب}}{\|\text{ب}\|} = \frac{(١ ، ١ ، ١)}{\sqrt{١+١+١}}$

∴ جيوب تمام المستقيم = ± $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$

③ مستقيم يمر بالنقطتين (٦ ، ٧ ، -١) ، (٢ ، -٣ ، ١) أوجد نسب الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه لهذا المستقيم

- الحل -

① متجه اتجاه المستقيم
= (٦ ، -٧ ، -١) - (٢ ، -٣ ، ١)
= (٤ ، -٤ ، -٢)

② جيوب تمام الاتجاه للمستقيم المطلوب

= ± $\frac{(٤ ، -٤ ، -٢)}{\sqrt{١٦+١٦+٤}}$ = ± $\left(\frac{٢}{٣} ، \frac{-٢}{٣} ، \frac{-١}{٣}\right)$

④ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم

① المار بالنقطتين (٣ ، ٢ ، ١) ، (-١ ، ٢ ، ٤)

- الحل -

① متجه اتجاه المستقيم
= (-١ ، ٢ ، ٤) - (٣ ، ٢ ، ١) = (-٤ ، ٠ ، ٣)

المعادلة المتجهة (الصورة الموجهة)

ر = (-١ ، ٢ ، ٤) + ك(-٤ ، ٠ ، ٣)

المعادلات البارامترية

س = -١ - ٤ك ، ص = ٢
، ع = ٤ + ٣ك

المعادلة الكارتيزية

$\frac{\text{س}+١}{-٤} = \frac{\text{ع}-٤}{٣}$ ، ص = ٢

② المار بالنقطة (٣ ، ١ ، ٠) والمتجه (٣ ، -٢ ، ٤) متجه اتجاه له

- الحل -

المعادلة المتجهة هي

ر = (٣ ، ١ ، ٠) + ك(٣ ، -٢ ، ٤)

المعادلات البارامترية

س = ٣ + ٣ك ، ص = ١ - ٢ك
، ع = ٤ك

المعادلة الكارتيزية

$\frac{\text{س}-٣}{٣} = \frac{\text{ص}-١}{-٢} = \frac{\text{ع}}{٤}$

③ المار بنقطة الأصل ، والمتجه (-٢، ٣، ١) متجه اتجاه له

-الحل-

المعادلة المتجهة هي

ر = ك(-٢، ٣، ١)

المعادلة البارامترية

س = -٢ك ، ص = ٣ك ، ع = ك

المعادلة الاحداثية

س/-٢ = ص/٣ = ع/١

④ المار بالنقطة (٢، ٠، -٣) وموازياً لمتجه أ = (٢، -٣، ٠)

-الحل-

المعادلة المتجهة هي

ر = (٢، ٠، -٣) + ك(٢، -٣، ٠)

المعادلة البارامترية

س = ٢ + ٢ك ، ص = -٣ك ، ع = -٣

المعادلة الاحداثية

(س-٢)/٢ = ص/-٣ ، ع = -٣

⑤ المار بالنقطة (٣، ٢، ٥) ويصنع مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الاحداثيات زوايا متساوية

-الحل-

∵ المستقيم يصنع زوايا متساوية مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الاحداثيات

∴ حتا² θس + حتا² θص + حتا² θع = ١

∴ حتا θس = حتا θص = حتا θع = ± ١/√٣

∴ متجه اتجاه المستقيم = (١/√٣ ، ١/√٣ ، ١/√٣)

أي أن متجه اتجاه المستقيم = (١، ١، ١)

∴ المعادلة المتجهة هي

ر = (٣، ٢، ٥) + ك(١، ١، ١)

والمعادلة البارامترية

س = ٣ + ك ، ص = ٢ + ك ، ع = ٥ + ك

والمعادلة الاحداثية

س - ٣ = ص - ٢ = ع - ٥

⑥ المار بالنقطة أ(١، -١، ٠) ويوازي المستقيم المار بالنقطتين ب(-٣، ٢، ١) ، ج(٢، ١، ٠) ثم بين أن النقطة د(-١٤، ٢، ٣) تقع على المستقيم

-الحل-

متجه الاتجاه ب ج = (٢، ١، ٠) - (-٣، ٢، ١)

= (٥، -١، -١)

المعادلة المتجهة

ر = (١، -١، ٠) + ك(٥، -١، -١)

والمعادلة البارامترية

س = ١ + ٥ك ، ص = -١ - ك

، ع = -ك

والمعادلة الاحداثية

(س-١)/٥ = (ص+١)/-١ = ع/-١

عند (-١٤-١)/٥ = -٣ ، (٢+١)/-١ = -٣

، ٣/-١ = -٣

∴ النقطة (-١٤، ٢، ٣) تقع على المستقيم

⑦ المار بالنقطة (-١، ٤، ٢) والموازي للمستقيم (س-٢)/٤ = ص/٥ = (ع+٢)/٣

-الحل-

متجه الاتجاه = (٤، ٥، ٣)

المعادلة المتجهة هي

ر = (-١، ٤، ٢) + ك(٤، ٥، ٣)

المعادلة البارامترية

$س = -1 + 4ل$ ، $ص = 4 + 5ل$

، $ع = 2 + 3ل$

المعادلة الإحداثية

$$\frac{س+1}{4} = \frac{ص-4}{5} = \frac{ع-2}{3}$$

(8) الذي يحمل المتوسط المرسوم من ج في Δ أ ب ج حيث أ(3، 6، -7)، ب(-5، 2، 3)، ج(4، -7، -2)

- الحل -

نقطة تقاطع المتوسطات هي

$م = \left(\frac{2}{3}، \frac{1}{3}، -2\right)$

∴ متجه الاتجاه = $\overrightarrow{مج} = \left(\frac{10}{3}، \frac{-22}{3}، 0\right)$

∴ متجه الاتجاه يساوي أيضاً (10، -22، 0)

∴ المعادلة المتجهة

$\vec{ر} = (4، -7، -2) + ل(10، -22، 0)$

المعادلة البارامترية

$س = 4 + 10ل$ ، $ص = -7 - 22ل$

$ع = -2$

المعادلة الإحداثية

$$\frac{س-4}{10} = \frac{ص+7}{-22} ، ع = -2$$

(9) المار بالنقطة أ(1، -2، 5) والموازي لمنصف الربع الثاني من المستوى ص ع

- الحل -

احداثيات أي نقطة تقع على منصف الربع الثاني من المستوى ص ع هي (0، -أ، أ)

نأخذ أي نقطة مع المنصف ولتكن (0، -1، 1)

∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب = (0، -1، 1)

∴ المعادلة المتجهة

$\vec{ر} = (1، -2، 5) + ل(0، -1، 1)$

المعادلة البارامترية

$س = 1$ ، $ص = -2 - ل$ ، $ع = 5 + 5ل$

المعادلة الإحداثية

$$س = 1 ، \frac{ص+2}{-1} = \frac{ع-5}{1}$$

(10) الذي معادلته المتجهة هي

$\vec{ر} = (1، 3، 9) + ل(5، 4، 2)$

- الحل -

المعادلة البارامترية

$س = 1 + 5ل$ ، $ص = 3 + 4ل$

$ع = 9 + 2ل$

المعادلة الإحداثية

$$\frac{س-1}{5} = \frac{ص-3}{4} = \frac{ع-9}{2}$$

(11) الذي معادلته المتماثلة

$$\frac{س+3}{2} = \frac{2ص-1}{5} = \frac{3ع+2}{4}$$

- الحل -

بوضع $\frac{س+3}{2} = \frac{2ص-1}{5} = \frac{3ع+2}{4} = ل$

∵ $س + 3 = 2ل$ ∴ $س = -3 + 2ل$

∵ $2ص - 1 = 5ل$ ∴ $ص = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}ل$

∵ $3ع + 2 = 4ل$ ∴ $ع = \frac{-2}{3} + \frac{4}{3}ل$

وهي المعادلات البارامترية للمستقيم

والمعادلة المتجهة هي

$\vec{ر} = \left(-3، \frac{1}{2}، \frac{-2}{3}\right) + ل\left(2، \frac{5}{2}، \frac{4}{3}\right)$

(5) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم $\frac{س+4}{3} = \frac{2ص+5}{2} = \frac{4-ع}{4}$ ثم أوجد نقطة تقع على هذا المستقيم

- الحل -

بوضع $\frac{س+4}{3} = \frac{2ص+5}{2} = \frac{4-ع}{4} = ل$

∴ س + ٤ = ٣ل ∴ س = -٤ + ٣ل

∴ ٢ص + ٥ = ٢ل ∴ ص = $-\frac{٥}{٢}$ + ل

∴ ٤ - ع = ٤ل ∴ ع = ٤ - ٤ل

وهي المعادلات البارامترية للمستقيم

والمعادلة المتجهة هي

ر = (-٤ ، $-\frac{٥}{٢}$ ، ٤) + ل(٣ ، ١ ، -٤)

وبوضع س = ٢ ∴ ص = $-\frac{١}{٢}$ ، ع = -٤

∴ (٢ ، $-\frac{١}{٢}$ ، -٤) احداثيات نقطة تقع على المستقيم

---

⑥ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ(٣ ، ٢ ، ٤) ، ب(٥ ، ٨ ، ٠) ثم اثبت أن أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة حيث جـ(٤ ، ٥ ، ٢)

-الحل-

متجه الاتجاه أب = (٥ ، ٨ ، ٠) - (٣ ، ٢ ، ٤)

= (٢ ، ٦ ، -٤)

∴ المعادلة المتجهة

ر = (٣ ، ٢ ، ٤) + ل(٢ ، ٦ ، -٤)

∴ المعادلة البارامترية

س = ٣ + ٢ل ، ص = ٢ + ٦ل

، ع = ٤ - ٤ل

∴ المعادلة الاحداثية

$$\frac{س-٣}{٢} = \frac{ص-٢}{٦} = \frac{ع-٤}{-٤}$$

بوضع س = ٤ ∴ ص = ٥ ، ع = ٢

∴ النقطة جـ ∈ للمستقيم

أي أن النقط أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة

---

⑦ أوجد مسقط النقطة أ(٠ ، ٩ ، ٦) على المستقيم المار بالنقطتين ب(١ ، ٢ ، ٣) ، جـ(٧ ، -٢ ، ٥)

- الحل -

نوجد معادلة الخط المستقيم $\overleftrightarrow{بجـ}$

متجه اتجاه المستقيم $\overrightarrow{بجـ}$

= (٧ ، -٢ ، ٥) - (١ ، ٢ ، ٣) = (٦ ، -٤ ، ٢)

∴ معادلة الخط المستقيم $\overleftrightarrow{بجـ}$ هي

ر = (١ ، ٢ ، ٣) + ل(٦ ، -٤ ، ٢)

∴ نقطة المسقط ولتكن

د = (١ + ٦ل ، ٢ - ٤ل ، ٣ + ٢ل)

$\overrightarrow{أد}$ = (١ + ٦ل ، ٢ - ٤ل ، ٣ + ٢ل) - (٠ ، ٩ ، ٦)

= (١ + ٦ل ، -٧ - ٤ل ، -٣ + ٢ل)

∵ $\overleftrightarrow{أد} \perp \overleftrightarrow{بجـ}$

∴ $\overleftrightarrow{أد}$ • $\overleftrightarrow{بجـ}$ = صفر

(١ + ٦ل ، -٧ - ٤ل ، -٣ + ٢ل) • (٦ ، -٤ ، ٢) = ٠

∴ ٦ + ٣٦ل + ٢٨ + ١٦ل - ٦ + ٤ل = صفر

∴ ٥٦ل + ٢٨ = صفر ∴ ل = $\frac{-٢٨}{٥٦}$

∴ ل = $\frac{-١}{٢}$

∴ النقطة د هي (-٢ ، ٤ ، ٢)

---

⑧ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين جيوب تمام اتجاههما هي

$$\left(\frac{٥}{١٣\sqrt{٢}} ، \frac{-١٢}{١٣\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right) ،$$

$$\left(\frac{-٣}{٥\sqrt{٢}} ، \frac{٤}{٥\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$$

- الحل -

$$جتا\theta = \left|\frac{٥}{١٣\sqrt{٢}} \times \frac{-٣}{٥\sqrt{٢}} + \frac{-١٢}{١٣\sqrt{٢}} \times \frac{٤}{٥\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}\right| = \frac{١}{٦٥}$$

∴ ق$(\hat{\theta})$ = ٨٩° ٧'

(٩) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين:

ل١ : ٢س = ٣ص − ١ = ع − ٣

، ل٢ : ر = (٢، −١، ٥) + ك(−١، ١، ٢)

- الحل -

ه١ = (١/٢ ، ١/٣ ، ١) ، ه٢ = (−١، ١، ٢)

∴ حتا θ = |ه١ . ه٢| / (||ه١|| ||ه٢||)

∴ حتا θ = |−١/٢ + ١/٣ + ٢| / (√(١/٤ + ١/٩ + ١) √(١ + ١ + ٤))

∴ ق(θ̂) = ٥٠° ٦َ

(١٠) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين

ر١ = (٢، −١، ٣) + ك(−٢، ٠، ٢)

، س = ١ ، (ص − ٤)/٣ = (ع + ٥)/−٣

- الحل -

ه١ = (−٢، ٠، ٢) ، ه٢ = (٠، ٣، −٣)

∴ حتا θ = |صفر + صفر − ٦| / (√(٤ + ٠ + ٤) √(٠ + ٩ + ٩)) = ١/٢

∴ ق(θ̂) = ٦٠°

(١١) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين

ل١ : س = ٢ − ٥ك ، ص = ١ − ك

، ع = ٣ + ٤ك ، ل٢ : (س + ١)/٣ = (٢ − ص)/٤ = ع/٢

- الحل -

ه١ = (−٥، −١، ٤) ، ه٢ = (٣، −٤، ٢)

حتا θ = |−١٥ + ٤ + ٨| / (√(٢٥ + ١ + ١٦) √(٩ + ١٦ + ٤))

∴ ق(θ̂) = ٨٥° ٤َ

(١٢) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين

ل١ : يمر بالنقطتين (−٣، ٢، ٤) ، (٢، ٥، −٢)

ل٢ : يمر بالنقطتين (١، −٢، ٢) ، (٤، ٢، ٣)

- الحل -

ه١ = (−٣، ٢، ٤) − (٢، ٥، −٢) = (−٥، −٣، ٦)

ه٢ = (١، −٢، ٢) − (٤، ٢، ٣) = (−٣، −٤، −١)

∴ حتا θ = |١٥ + ١٢ − ٦| / (√(٢٥ + ٩ + ٣٦) √(٩ + ١٦ + ١))

∴ ق(θ̂) = ٦٠° ٣١َ

(١٣) أوجد قياس الزاوية بين المستقيم

س = ١ ، ص = ٢ والمستقيم ص = −١ ، ع = صفر

- الحل -

ه١ = (٠، ٠، ١) ، ه٢ = (١، ٠، ٠)

∴ حتا θ = |٠ + ٠ + ٠| / (√(٠ + ٠ + ١) √(١ + ٠ + ٠)) = صفر

∴ ق(θ̂) = ٩٠°

(١٤) اثبت أن المستقيمين متقاطعين وأوجد نقطة تقاطعهما:

ل١ : س = ك١ + ٤ ، ص = −٤ك١ − ٣

، ع = ٧ك١ − ١

ل٢ : س = ٢ك٢ + ١ ، ص = −٣ك٢ − ١

، ع = ٨ك٢ − ١٠

- الحل -

عند تقاطع المستقيمين فإن

ك١ + ٤ = ٢ك٢ + ١ ∴ ك١ − ٢ك٢ = −٣ (١)

، −٤ك١ − ٣ = −٣ك٢ − ١ ∴ ٤ك١ − ٣ك٢ = −٢ (٢)

، ٧ك١ − ١ = ٨ك٢ − ١٠ ∴ ٧ك١ − ٨ك٢ = −٩ (٣)

من (١) ، (٢) فإن ك١ = ١ ، ك٢ = ٢

وبالتعويض في (٣) ∴ ٧ − ١٦ = −٩ ∴ تحققها

∴ س = ٥ ، ص = -٧ ، ع = ٦

∴ المستقيمين متقاطعين في النقطة (٥ ، -٧ ، ٦)

(١٥) اثبت أن المستقيمين

س - ٢ = ٢ص - ٦ = ٣ع ،

٤س - ١١ = ٤ص - ١٣ = ٣ع

يتقاطعان في نقطة وأوجد احداثياتها

- الحل -

بوضع س - ٢ = ٢ص - ٦ = ٣ع = $ل_1$

∴ س = ٢ + $ل_1$ ، ص = ٣ + $\frac{1}{2}ل_1$

، ع = $\frac{1}{3}ل_1$

، بوضع ٤س - ١١ = ٤ص - ١٣ = ٣ع = $ل_2$

∴ س = $\frac{11}{4} + \frac{1}{4}ل_2$ ، ص = $\frac{13}{4} + \frac{1}{4}ل_2$

، ع = $\frac{1}{3}ل_2$

∴ عند تقاطع المستقيمين

٢ + $ل_1$ = $\frac{11}{4} + \frac{1}{4}ل_2$ ∴ $ل_1 - \frac{1}{4}ل_2 = \frac{3}{4}$ (١)

، ٣ + $\frac{1}{2}ل_1$ = $\frac{13}{4} + \frac{1}{4}ل_2$ ∴ $\frac{1}{2}ل_1 - \frac{1}{4}ل_2 = \frac{1}{4}$ (٢)

، $\frac{1}{3}ل_1 = \frac{1}{3}ل_2$ ∴ $ل_1 = ل_2$ (٣)

ومن (١) ، (٢) ∴ $ل_1$ = ١ ، $ل_2$ = ١

ونجد أن قيم $ل_1$ ، $ل_2$ تحقق المعادلة (٣)

∴ س = ٣ ، ص = ٣,٥ ، ع = $\frac{1}{3}$

∴ المستقيمان متقاطعان في النقطة (٣ ، ٣,٥ ، $\frac{1}{3}$)

(١٦) اثبت أن المستقيمين:

$\frac{س-٦}{٢} = \frac{ص-١}{٢} = \frac{ع-٥}{٣}$ ،

$\frac{س-٢}{١} = \frac{ص-٣}{-٢} = \frac{ع+٤}{٣}$ متقاطعين وأوجد

احداثيات نقطة التقاطع

- الحل -

بوضع $\frac{س-٦}{٢} = \frac{ص-١}{٢} = \frac{ع-٥}{٣}$ = $ل_1$

∴ س = ٦ + ٢$ل_1$ ، ص = ١ + ٢$ل_1$

، ع = ٥ + ٣$ل_1$

وبوضع $\frac{س-٢}{١} = \frac{ص-٣}{-٢} = \frac{ع+٤}{٣}$ = $ل_2$

∴ س = ٢ + $ل_2$ ، ص = ٣ - ٢$ل_2$

، ع = -٤ + ٣$ل_2$

وعند تقاطع المستقيمين فإن

٦ + ٢$ل_1$ = ٢ + $ل_2$ ∴ ٢$ل_1$ - $ل_2$ = -٤ (١)

، ١ + ٢$ل_1$ = ٣ - ٢$ل_2$ ∴ ٢$ل_1$ + ٢$ل_2$ = ٢ (٢)

، ٥ + ٣$ل_1$ = -٤ + ٣$ل_2$ ∴ ٣$ل_1$ - ٣$ل_2$ = -٩ (٣)

من (١) ، (٢) ∴ $ل_1$ = -١ ، $ل_2$ = ٢

وبالتعويض في المعادلة (٣)

∴ -٣ - ٦ = -٩ ∴ تحققها

∴ س = ٤ ، ص = -١ ، ع = ٢

∴ المستقيمان متقاطعان في النقطة

(٤ ، -١ ، ٢)

(١٧) اثبت أن المستقيمين

$\vec{ر}_1$ = $\vec{ص}$ + $ل_1$($\vec{س}$ + ٢$\vec{ص}$ - $\vec{ع}$)

، $\vec{ر}_2$ = ($\vec{س}$ + $\vec{ص}$ + $\vec{ع}$) + $ل_2$(-٢$\vec{س}$ - ٢$\vec{ص}$)

متقاطعان في نقطة وأوجد احداثياتها

- الحل -

عند تقاطع المستقيمين فإن $\vec{ر}_1 = \vec{ر}_2$

∴ (٠ ، ١ ، ٠) + $ل_1$(١ ، ٢ ، -١)

= (١ ، ١ ، ١) + $ل_2$(-٢ ، -٢ ، ٠)

∴ $ل_1$ = ١ - ٢$ل_2$ ∴ $ل_1$ + ٢$ل_2$ = ١ (١)

، ١ + ٢$ل_1$ = ١ - ٢$ل_2$ ∴ ٢$ل_1$ + ٢$ل_2$ = صفر (٢)

، $-\text{ك}_٢ = ١$ ∴ $\text{ك}_٢ = -١$ (٣)

ومن (١)، (٢) ينتج أن $\text{ك}_١ = -١$ ، $\text{ك}_٢ = ١$

وهذه القيم تحقق المعادلة (٣)

∴ (س، ص، ع) = (٠، ١، ٠) + −١ (١، ٢، −١)

ومنها س = −١ ، ص = −١ ، ع = ١

∴ المستقيمان متقاطعان في النقطة (−١ ، −١ ، ١)

(١٨) أوجد قيمة ن التي تجعل المستقيمين

$\text{ل}_١ : \vec{\text{ر}} = (٣، -١، \text{ن}) + \text{ك}_١ (٤، ١، ٣)$

، $\text{ل}_٢ : \text{س} = \frac{\text{ص}-٤}{-١} = \frac{\text{ع}+١}{٢}$

متقاطعان في نقطة وأوجد إحداثياتها

− الحل −

بوضع $\text{س} = \frac{\text{ص}-٤}{-١} = \frac{\text{ع}+١}{٢} = \text{ك}_٢$

∴ $\text{س} = \text{ك}_٢$ ، $\text{ص} = ٤ - \text{ك}_٢$ ، $\text{ع} = -١ + ٢\text{ك}_٢$

وعند تقاطع المستقيمين

∴ $٣ + ٤\text{ك}_١ = \text{ك}_٢$ ∴ $٤\text{ك}_١ - \text{ك}_٢ = -٣$ (١)

، $-١ + \text{ك}_١ = ٤ - \text{ك}_٢$ ∴ $\text{ك}_١ + \text{ك}_٢ = ٥$ (٢)

، $\text{ن} + ٣\text{ك}_١ = -١ + ٢\text{ك}_٢$ ∴ $٣\text{ك}_١ - ٢\text{ك}_٢ = -١ - \text{ن}$ (٣)

ومن (١)، (٢) فإن

$\text{ك}_١ = \frac{٢}{٥}$ ، $\text{ك}_٢ = \frac{٢٣}{٥}$

∴ المستقيمان متقاطعان

∴ قيم $\text{ك}_١$، $\text{ك}_٢$ تحقق المعادلة (٣)

∴ $٣ \times \frac{٢}{٥} - ٢ \times \frac{٢٣}{٥} = -١ - \text{ن}$

∴ ن = ٧

∴ نقطة التقاطع هي $(\frac{٢٣}{٥} ، \frac{-٣}{٥} ، \frac{٤١}{٥})$

(١٩) أثبت أن مجموعة المعادلات

$\frac{\text{س}-١}{-٦} = \frac{\text{ص}-٢}{-٨} = \frac{\text{ع}-٣}{٢٤}$ ،

$\frac{\text{س}-٤}{٣} = \frac{\text{ص}-٦}{٤} = \frac{\text{ع}+٩}{-١٢}$ تمثلان نفس الخط المستقيم

− الحل −

∵ $\text{ل}_١ : \frac{\text{س}-١}{-٦} = \frac{\text{ص}-٢}{-٨} = \frac{\text{ع}-٣}{٢٤}$ ÷ −٢

∴ $\text{ل}_١ : \frac{\text{س}-١}{٣} = \frac{\text{ص}-٢}{٤} = \frac{\text{ع}-٣}{-١٢}$

∴ $\text{هـ}_١ = (٣، ٤، -١٢)$

، $\text{ل}_٢ : \frac{\text{س}-٤}{٣} = \frac{\text{ص}-٦}{٤} = \frac{\text{ع}+٩}{-١٢}$

∴ $\text{هـ}_٢ = (٣، ٤، -١٢)$

∴ $\text{ل}_١$ ، $\text{ل}_٢$ لهما نفس متجه الاتجاه (١)

بوضع س = ٤ في معادلة $\text{ل}_٢$

∴ ص = ٦ ، ع = −٩

∴ النقطة (٤، ٦، −٩) ∈ $\text{ل}_٢$

ونجد أن هذه النقطة تحقق معادلة $\text{ل}_١$

∴ (٤، ٦، −٩) ∈ لكل من $\text{ل}_١$ ، $\text{ل}_٢$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن

$\text{ل}_١$ ، $\text{ل}_٢$ يمثلان نفس الخط المستقيم

(٢٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢، −١، ٣) وبنقطة تقاطع المستقيمين

$\frac{\text{س}-١}{٢} = \frac{\text{ص}-٢}{٣} = \frac{\text{ع}-٣}{٣}$ ، $\frac{\text{س}-٣}{٤} = \frac{\text{ص}-٥}{٥} = \frac{\text{ع}-٦}{٣}$

− الحل −

عند نقطة التقاطع $\vec{\text{ر}}_١ = \vec{\text{ر}}_٢$

∴ (١، ٢، ٣) + $\text{ك}_١$ (٢، ٣، ٣)

= (٣، ٥، ٦) + $\text{ك}_٢$ (٤، ٥، ٣)

∴ $١ + ٢ل_١ = ٣ + ٤ل_٢$ ∴ $٢ل_١ - ٤ل_٢ = ٢$ ①

، $٢ + ٣ل_١ = ٥ + ٥ل_٢$ ∴ $٣ل_١ - ٥ل_٢ = ٣$ ②

، $٣ + ٣ل_١ = ٦ + ٣ل_٢$ ∴ $٣ل_١ - ٣ل_٢ = ٣$ ③

من ① ، ② ينتج أن

$ل_١ = ١$ ، $ل_٢ =$ صفر

$(س، ص، ع) = (١، ٢، ٣) + ١(٢، ٣، ٣)$

∴ نقطة التقاطع هي $(٣، ٥، ٦)$

∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب

$= (٣، ٥، ٦) - (٢، -١، ٣) = (١، ٦، ٣)$

∴ المعادلة المتجهة للمستقيم المطلوب هي

$\vec{ر} = (٢، -١، ٣) + ل(١، ٦، ٣)$

المعادلة البارامترية للمستقيم المطلوب هي

$س = ٢ + ل$ ، $ص = -١ + ٦ل$

، $ع = ٣ + ٣ل$

المعادلة الكارتيزية للمستقيم المطلوب هي

$س - ٢ = \frac{ص + ١}{٦} = \frac{ع - ٣}{٣}$

㉑ اذكر الشرط (أو الشروط اللازمة) لكي يكون المستقيمان

$ل_١$: $س = س_١ + أ_١ ل_١$ ، $ص = ص_١ + ب_١ ل_١$

، $ع = ع_١ + ج_١ ل_١$

$ل_٢$: $س = س_٢ + أ_٢ ل_٢$ ، $ص = ص_٢ + ب_٢ ل_٢$

، $ع = ع_٢ + ج_٢ ل_٢$

① متوازيين ② متعامدين

③ متقاطعين في نقطة

- الحل -

① لكي يكونا المستقيمان متوازيين فإن

$\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{ج_١}{ج_٢}$

② لكي يكونا المستقيمان متعامدين فإن

$أ_١ أ_٢ + ب_١ ب_٢ + ج_١ ج_٢ =$ صفر

③ يتقاطع المستقيمان $ل_١$ ، $ل_٢$ إذا وجدت $ل_١$ ، $ل_٢$ تحقق كلاً من المعادلات الثلاثة الآتية:

$س_١ - س_٢ = أ_٢ ل_٢ - أ_١ ل_١$

، $ص_١ - ص_٢ = ب_٢ ل_٢ - ب_١ ل_١$

، $ع_١ - ع_٢ = ج_٢ ل_٢ - ج_١ ل_١$

㉒ إذا كان $\vec{وأ} = \vec{س} - ٢\vec{ص} + \vec{ع}$ ، $\vec{وب} = -\vec{س} - ٣\vec{ع}$ ، $\vec{وج} = ٢\vec{س} + \vec{ص} - ٢\vec{ع}$ ، $\vec{ود} = ٨\vec{س} + \vec{ص} + ٤\vec{ع}$ أوجد المعادلة المتجهة لكل من المستقيمات الآتية:

① المار بالنقطتين أ ، ب

② المار بالنقطة د موازياً $\overleftrightarrow{ب ج}$

③ المار بالنقطة ج ويقطع $\overleftrightarrow{أ ب}$ على التعامد

- الحل -

$\vec{أ} = (١، -٢، ١)$ ، $\vec{ب} = (-١، ٠، -٣)$

$\vec{ج} = (٣، ١، -٢)$ ، $\vec{د} = (٨، ١، ٤)$

① $\vec{أب} = (-١، ٠، -٣) - (١، -٢، ١)$

$= (-٢، ٢، -٤)$

∴ $\vec{ى} = (-٢، ٢، -٤)$

∴ $\vec{ر} = (١، -٢، ١) + ل(-٢، ٢، -٤)$

② $\vec{ب ج} = (٣، ١، -٢) - (-١، ٠، -٣)$

$= (٤، ١، ١)$

∴ $\vec{ر} = (٨، ١، ٤) + ل(٤، ١، ١)$

③ بفرض أن نقطة التقاطع ن

∴ معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هي

$\vec{ر} = (١، -٢، ١) + ل(-٢، ٢، -٤)$

∴ $ن = (١ - ٢ل ، -٢ + ٢ل ، ١ - ٤ل)$

∴ $\vec{ج ن} = ن - ج$

∴ جـمَ = (-٢-٢ل ، -٣+٢ل ، ٣-٤ل)

∵ جـمَ ⊥ مَبَ ∴ هـ١ . هـ٢ = صفر

∴ (-٢ ، ٢ ، ٤) • (-٢-٢ل ، -٣+٢ل ، ٣-٤ل) = ٠

∴ ٤+٤ل-٦+٤ل-١٢+١٦ل = صفر

∴ ٢٤ل - ١٤ = صفر ∴ ٢٤ل = ١٤

∴ ل = ١٤/٢٤ = ٧/١٢

∴ جـمَ = (-١٩/٦ ، -١١/٦ ، ٢/٣)

∴ رَ = (٣ ، ١ ، -٢) + لَ(-١٩/٦ ، -١١/٦ ، ٢/٣)

(٢٣) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، -١ ، ٣) ويقطع المستقيم

رَ١ = (-١ ، -١ ، ٢) + ل(٢ ، ٢ ، -١)

على التعامد

- الحل -

م(٢ ، -١ ، ٣) ، ل٢ ، ل١ ، جـ

نفرض أن المستقيمين متقاطعان في نقطة جـ

∵ جـ ∈ المستقيم ل١

∴ جـ = (١+٢ل ، -١+٢ل ، ٢-ل)

متجه اتجاه ل٢ (المستقيم المطلوب)

هـ٢ = مَجـ = جـ - م

∴ هـ٢ = (٢ل-١ ، ٢ل ، -ل-١)

∵ هـ١ = (٢ ، ٢ ، -١)

∵ المستقيمين متعامدان ∴ هـ١ . هـ٢ = صفر

∴ (٢ ، ٢ ، -١) • (٢ل-١ ، ٢ل ، -ل-١) = صفر

∴ ٤ل-٢+٤ل+ل+١ = صفر

∴ ٩ل-١ = صفر ∴ ل = ١/٩

∴ هـ٢ = (-٧/٩ ، ٢/٩ ، -١٠/٩)

= (-٧ ، ٢ ، -١٠)

∴ معادلة المستقيم ل٢ هي

رَ = (٢ ، -١ ، ٣) + لَ(-٧ ، ٢ ، -١٠)

(٢٤) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، -١ ، ٠) وعمودي على المستقيم

رَ = (٣ ، ١ ، ١) + ل(١ ، ٢ ، -١)

- الحل -

م(٣ ، -١ ، ٠) ، ل٢ ، ل١ ، جـ

نفرض أن المستقيمان متقاطعان في نقطة جـ

∵ جـ ∈ المستقيم ل١

∴ جـ = (٣+ل ، ١+٢ل ، ١-ل)

∴ متجه اتجاه ل٢ (المستقيم المطلوب)

هـ٢ = مَجـ = (-١+ل ، ٢+٢ل ، ١-ل)

∵ المستقيمين متعامدان ∴ هـ١ . هـ٢ = صفر

∴ (١ ، ٢ ، -١) • (-١+ل ، ٢+٢ل ، ١-ل) = صفر

∴ -١+ل+٤+٤ل-١+ل = صفر

∴ ٦ل+٢ = صفر ∴ ل = -١/٣

∴ هـ٢ = (-٤/٣ ، ٤/٣ ، ٤/٣)

∴ معادلة هـ٢ هي

رَ = (٣ ، -١ ، صفر) + ل(-٤/٣ ، ٤/٣ ، ٤/٣)

(٢٥) اثبت أن المستقيمين

رَ١ = (٣ ، -٣ ، ٥) + ل١(٠ ، -٥ ، ٥)

رَ٢ = (-٢ ، ٣ ، ١) + ل٢(٥ ، -١ ، -١)

متعامدان ومتقاطعان في نقطة وأوجد إحداثيات نقطة تقاطعهما

- الحل -

∵ هـ١ = (٠ ، -٥ ، ٥) ، هـ٢ = (٥ ، -١ ، -١)

∵ هـ١ . هـ٢ = (٠ ، -٥ ، ٥) • (٥ ، -١ ، -١) = صفر

∴ المستقيمان متعامدان

عند نقطة التقاطع يكون رَ١ = رَ٢

∴ (٣ ، -٣ ، ٥) + ل١(٠ ، -٥ ، ٥) = (-٢ ، ٣ ، ١) + ل٢(٥ ، -١ ، -١)

∴ ٣ = -٢ + ٥ل٢ ∴ ل٢ = ١ (١)

، -٣ - ٥ل١ = ٣ - ل٢ ∴ ٥ل١ - ل٢ = -٦ (٢)

، ٥ + ٥ $ل_١$ = ١ − $ل_٢$ ∴ ٥ $ل_١$ + $ل_٢$ = −٤ ③

من ②، ③ ينتج أن

$ل_١$ = −١ ، $ل_٢$ = ١

وهذا يتحقق مع معادلة ① أيضاً

∴ المستقيمان متقاطعان ومتعامدان

، (س، ص، ع) = (٣، −٣، ٥) − (−١٠، −٥، ٥)

∴ احداثيات نقطة التقاطع هي

(٣، ٢، صفر)

---

(٢٦) اثبت أن المستقيمين

$\vec{ر_١}$ = (٣، −١، ٢) + $ل_١$ (٤، ١، ٣)

$\vec{ر_٢}$ = (٠، ٤، −١) + $ل_٢$ (١، −١، ٢)

متخالفان

- الحل -

عند نقطة التقاطع يكون $\vec{ر_١}$ = $\vec{ر_٢}$

∴ (٣، −١، ٢) + $ل_١$ (٤، ١، ٣)

= (٠، ٤، −١) + $ل_٢$ (١، −١، ٢)

∴ ٣ + ٤ $ل_١$ = $ل_٢$ ∴ ٤ $ل_١$ − $ل_٢$ = −٣ ①

، −١ + $ل_١$ = ٤ − $ل_٢$ ∴ $ل_١$ + $ل_٢$ = ٥ ②

، ٢ + ٣ $ل_١$ = −١ + ٢ $ل_٢$ ∴ ٣ $ل_١$ − ٢ $ل_٢$ = −٣ ③

من ①، ② ينتج أن

$ل_١ = \frac{٢}{٥}$ ، $ل_٢ = \frac{٢٣}{٥}$

وبالتعويض في المعادلة ③

∴ ٣ × $\frac{٢}{٥}$ − ٢ × $\frac{٢٣}{٥}$ ≠ −٣

أي أن هذه القيم لا تحقق المعادلة ③

∴ المستقيمان متخالفان

---

(٢٧) أوجد ن التي تجعل المستقيم المار بالنقطتين ا (ن، ١، −١) ، ب (٣، ٠، ٢ن) عمودياً على المستقيم المار بالنقطتين ج (٤، ٢ن، ١) ، د (٢، ٣، ١)

- الحل -

$\vec{ه_٢}$ = (ن − ٢، ١، −١ − ٢ن)

، $\vec{ه_٢}$ = (٢، ٢ن − ٣، −١)

∵ المستقيمان متعامدان ∴ $\vec{ه_١}$. $\vec{ه_٢}$ = صفر

∴ (ن − ٢، ١، −١ − ٢ن) • (٢، ٢ن − ٣، −١) = صفر

∴ ٢ن − ٤ + ٢ن − ٣ + ١ + ٢ن = صفر

∴ ٦ن − ٦ = صفر ∴ ن = ١

---

(٢٨) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢، ١، −٤) على المستقيم

$\vec{ر}$ = (١، −١، ٢) + ل (٢، ٣، −٢)

- الحل -

$\vec{ه_١}$ = (٢، ٣، −٢)

$\vec{ه_٢}$ = $\vec{اب}$ = (−١، −٢، ٦)

حتا θ = $\frac{|(٢، ٣، −٢) • (−١، −٢، ٦)|}{\sqrt{٤ + ٩ + ٤}\ \sqrt{١ + ٤ + ٣٦}}$

∴ ق (θ) = ٤٠° ٤٥َ

اب = $\sqrt{١ + ٤ + ٣٦}$ = $\sqrt{٤١}$ وحدة طول

∴ طول العمود = اب جا θ

= $\sqrt{٤١}$ جا ٤٥َ ٤٠° = ٤,١٨ وحدة طول

---

(٢٩) أوجد بعد النقطة (−١، ٢، ٥) عن المستقيم المار بالنقطة (٣، ٤، ٥) ومتجه اتجاهه (٢، −٣، ٦)

- الحل -

$\vec{ه_١}$ = (٢، −٣، ٦)

، $\vec{ه_٢}$ = $\vec{اب}$ = (٤، ٢، ٠)

حتا θ = $\frac{|(٢، −٣، ٦) • (٤، ٢، ٠)|}{\sqrt{٤ + ٩ + ٣٦}\ \sqrt{١٦ + ٤ + ٠}}$

∴ ق (θ) = ٨٦° ٢٠َ

، اب = $\sqrt{١٦ + ٤}$ = $\sqrt{٢٠}$ وحدة طول

∴ طول العمود = اب جا θ

= $\sqrt{٢٠}$ جا ٢٠َ ٨٦° = ٤,٤٦ وحدة طول

(٣٠) أوجد طول مسقط المتجه المار بالنقطتين (-١، ٢، ٠) ، (١، -١، ٢) على المستقيم
ر = (٢، ٣، -٤) + ك (٣، -٣، ٢)

- الحل -

هـ١ = (-١، ٢، ٠) - (١، -١، ٢)
= (-٢، ٣، -٢)
، هـ٢ = (٣، -٣، ٢)

∴ حتا θ = |(-٢، ٣، -٢) • (٣، -٣، ٢)| / (√(٤+٩+٤) √(٩+٤+٤))

∴ ق(θ) = ١٠° ٤٥َ

، أ ب = √(٤+٩+٤) = √١٧

∴ طول مسقط المتجه على المستقيم
= أ ب حتا θ = √١٧ حتا ١٠° ٤٥َ
≃ ٤و١ وحدة طول

(٣١) أوجد البعد العمودي من النقطة (٣، -١، ٧) للمستقيم المار بالنقطتين (٢، ٢، -١) ، (٠، ٣، ٥)

- الحل -

هـ١ = أ ب = (-٣، ٤، -٢)
هـ٢ = ب ج = (٢، -١، -٦)

حتا θ = |(-٣، ٤، -٢) • (٢، -١، -٦)| / (√(٩+١٦+٤) √(٤+١+٣٦))

∴ ق(θ) = ٨٦° ٤٠َ

، أ ب = √(٩+١٦+٤) = √٢٩ وحدة طول

∴ البعد العمودي = أ ب جا θ
= √٢٩ جا ٨٦° ٤٠َ
≃ ٥و٣٨ وحدة طول

(٣٢) أوجد بعد النقطة (١، ٢، ٥) عن المستقيم ل: (س-١)/٢ = (ص-٤)/٣ = ع

- الحل -

هـ١ = أ ب = (٠، -٢، ٥)
هـ٢ = (٢، ٣، ١)

∴ حتا θ = |(٠، -٢، ٥) • (٢، ٣، ١)| / (√(٠+٤+٢٥) √(٤+٩+١))

∴ ق(θ) = ٨٧° ٩َ

، أ ب = √(٠+٤+٢٥) = √٢٩ وحدة طول

∴ بعد النقطة عن المستقيم
= أ ب جا θ = √٢٩ جا ٨٧° ٩َ
= ٥و٣٨ وحدة طول

(٣٣) أوجد بعد النقطة (١، -٢، ٣) عن المستقيم المار بالنقطة (٢، -٣، ٥) ويصنع زوايا متساوية مع المحاور

- الحل -

∵ المستقيم يصنع زوايا متساوية مع المحاور

∴ هـ١ = (١/√٣ ، ١/√٣ ، ١/√٣)

أي أن هـ١ = (١، ١، ١)
، هـ٢ = أ ب = (١، -١، ٢)

∴ حتا θ = |(١، ١، ١) • (١، -١، ٢)| / (√(١+١+١) √(١+١+٤))

∴ ق(θ) = ٦١° ٥٢َ

، أ ب = √(١+١+٤) = √٦ وحدة طول

∴ بعد النقطة عن المستقيم = أ ب جا θ
= √٦ جا ٦١° ٥٢َ ≃ ٢و٢ وحدة طول

(٣٤) أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين

ل١ : (س − ٢)/٢ = (ص + ١)/١ = ع/٣ ،

ل٢ : (س − ٢)/٢ = (ص − ١)/١ = (ع − ٣)/٣

- الحل -

أ(٢، −١، ٠) ، ب(٢، ١، ٣)

ه١ = أب = (٠، ٢، ٣)

ه٢ = (٢، ١، ٣)

∴ حتا θ = |(٠، ٢، ٣) · (٢، ١، ٣)| ÷ (√(٠ + ٤ + ٩) √(٤ + ١ + ٩))

∴ ق(θ) = ٣٥° ٣٣َ

، أب = √(٤ + ٩) = √١٣ وحدة طول

∴ البعد بين المستقيمين = أب جا θ

= √١٣ جا ٣٥° ٣٣َ ≃ ٢,١ وحدة طول

(٣٥) إذا كان أ(١، ٢، ٤) ، ب(−٢، −١، ٣) ، ج(٢، ٤، −٣) أوجد معادلة المستقيم ب ج ثم أوجد مساحة △ أ ب ج

- الحل -

متجه اتجاه المستقيم ب ج

= ب ج = (٤، ٣، −٥)

∴ معادلة المستقيم ب ج هي ر = (٢، ٤، −٣) + ك(٤، ٣، −٥)

، متجه اتجاه المستقيم أ ج = أ ج

= (١، ٢، −٧)

∴ حتا ج = |(١، ٢، −٧) · (٤، ٣، −٥)| ÷ (√(١ + ٤ + ٤٩) √(١٦ + ٩ + ٢٥))

∴ ق(ج) = ٣٠°

، أ ج = √(١ + ٤ + ٤٩) = √٥٤ وحدة طول

، ب ج = √(١٦ + ٩ + ٢٥) = ٥√٢ وحدة طول

∴ مساحة △ أ ب ج = ½ × √٥٤ × ٥√٢ جا ٣٠

= ١٥√٣ / ٢ وحدة مساحة

(٣٦) أوجد طول نصف قطر الكرة

(س + ١)² + (ص − ٢)² + (ع − ٥)² = نق²

والتي يمسها المستقيم (س − ٣)/٤ = (ص − ٤)/−٦ = (ع − ٥)/١٢

- الحل -

مركز الكرة = (−١، ٢، ٥)

معادلة المستقيم هي

ر = (٣، ٤، ٥) + ك(٤، −٦، ١٢)

متجه اتجاه المستقيم ب م

= (−٤، −٢، ٠) ، ب م = √٢٠ وحدة طول

متجه اتجاه المستقيم ل = (٤، −٦، ١٢)

∴ حتا ب = |(−٤، −٢، ٠) · (٤، −٦، ١٢)| ÷ (√(١٦ + ٤ + ٠) √(١٦ + ٣٦ + ١٤٤))

∴ ق(ب) = ٨٦° ٢٠َ

∴ نق = ب م جا ب

= √٢٠ جا ٨٦° ٢٠َ = ٤,٤٦ وحدة طول

(٣٧) أوجد طول جزء المستقيم (س − ٥)/١ = (ص − ٣)/٣ = (ع − ١)/−٢ المقطوع بالكرة

س² + ص² + ع² − ٢س − ٤ص − ٢ع − ٣٩ = صفر

- الحل -

مركز الكرة = (١، ٢، ١)

، نق = √(١ + ٤ + ١ + ٣٩) = ٣√٥ وحدة طول

معادلة المستقيم ل :

ر = (٥، ٣، ١) + ك(١، ٣، −٢)

∴ متجه اتجاه المستقيم أم = أم = (−٤، −١، ٠)

، أم = √١٧ وحدة طول

∴ جتا θ = |(-٤، -١، ٠) · (١، ٣، -٢)| ÷ (√(١٦+١+٠) √(١+٩+٤))

∴ ق(θ) = ٦٣° ١َ

∴ م مَ = م مَ جا θ = √١٧ جا ٦٣° ١َ

≃ ٣٫٦٧ وحدة طول

∴ م ب = √(نق² - (م مَ)²) = ٥٫٦

∴ ب جـ = ٢ × ٥٫٦ = ١١٫٢ وحدة طول

حل آخر

بوضع (س - ٥)/١ = (ص - ٣)/٣ = (ع - ١)/-٢ = ل

∴ س = ٥ + ل ، ص = ٣ + ٣ل

، ع = ١ - ٢ل

وبالتعويض في معادلة الكرة

∴ (٥ + ل)² + (٣ + ٣ل)² + (١ - ٢ل)²

- ٢(٥ + ل) - ٤(٣ + ٣ل) - ٢(١ - ٢ل) - ٣٩ = ٠

∴ ل² + ل - ٢ = صفر

∴ ل = -٢ ، ل = ١

∴ نقطة التقاطع هي

(٥ - ٢ ، ٣ - ٦ ، ١ + ٤) = (٣ ، -٣ ، ٥)

أو (٥ + ١ ، ٣ + ٣ ، ١ - ٢) = (٦ ، ٦ ، -١)

∴ البعد بين النقطتين

= √((٣)² + (٩)² + (-٦)²) = ١١٫٢ وحدة طول

تمارين عامة

① أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم:

① المار بالنقطتين أ(٢ ، ٧ ، -٣) ، ب(٢ ، ١٦ ، ١٧)

② المار بالنقطة (٤ ، -٣ ، ٥) والمتجه ى = (٢ ، ١ ، -١) متجه اتجاه له

③ المار بالنقطة (١ ، ٢ ، -٦) والموازي للمتجه (٤ ، ١ ، ٣)

④ المار بالنقطة (١ ، -١ ، ١) ومركز الكرة

٢س² + ٢ص² + ٢ع² - ٢س + ٤ص - ٦ع = ١

⑤ الذي معادلته المتماثلة

س - ٢ = (ص + ٤)/٥ = (٧ - ع)/٢

② أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ ، -٣ ، ٥) والمتجه (١ ، -٢ ، ٢) متجه اتجاه له ثم أوجد نقطة أخرى على هذا المستقيم

③ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين

ل١ : رَ = (٢ ، -١ ، ٣) + ك(-١ ، ٤ ، ٢)

ل٢ : رَ = (٠ ، ٢ ، -١) + ك(١ ، ١ ، ٣)

④ أوجد قيمة م لكي يتقاطع المستقيمان

(س + ٢)/٢ = ص/-٣ = (ع - ١)/٤ ،

(س - ٣)/م = (ص - ١)/٤ = (ع - ٧)/٢

⑤ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل ويقطع المستقيم رَ = (٣ ، ١ ، ٤) + ك(٢ ، ١ ، ٣) على التعامد

⑥ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وبنقطة تقاطع المستقيمين

ل١ : رَ = (٢ ، ٣ ، ٤) + ك(-٤ ، -٤ ، ٥)

، ل٢ : س = -٦ ، (ص + ١٠)/١ = (ع + ١)/٣

⑦ اثبت أن المستقيمين

رَ١ = (١ ، ٢ ، ٤) + ك(٢ ، -١ ، ١)

، رَ٢ = (١ ، ١ ، ١) + ك(-٢ ، ٧ ، ١١) متعامدان

ثم بين أن المستقيمين متخالفان

⑧ أوجد بعد النقطة (-١ ، ٢ ، ٦) عن المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣ ، -٤) موازياً المتجه (٦ ، ٣ ، -٤)

⑨ أوجد بعد النقطة (-٢ ، ٣ ، -٤) عن الخط المستقيم

(س + ٢) / ٣ = (٢ص + ٣) / ٤ = (٣ع + ٤) / ٥

⑩ اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣ ، ٤) ، (٣ ، ٤ ، ٥) يكون عمودياً على المستقيم المار بالنقطتين (-٢ ، -٣ ، ٦) ، (٤ ، ٠ ، -٣) وابحث كونهما متقاطعان أم متخالفان

⑪ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، ١ ، -٤) على المستقيم ر = (١ ، -١ ، ٢) + ك(٢ ، ٣ ، -٢)

معادلة المستوى في الفراغ

•• الصور المختلفة لمعادلة المستوى في الفراغ

لنفرض أ(س$_1$، ص$_1$، ع$_1$) نقطة معلومة تقع على المستوى ط متجه موضعها $\overline{أ}$ وكان المتجه $\overline{ن}$ = (أ، ب، جـ) متجه اتجاه عمودي على المستوى (تذكر كل المتجهات العمودية على المستوى تكون متوازية)

ولنفرض ب(س، ص، ع) أي نقطة على المستوى ط متجه موضعها $\overline{ر}$ فإن

∵ $\overline{ن}$ ⊥ المستوى ط

∴ $\overline{ن}$ ⊥ أي متجه في المستوى

∴ $\overline{ن}$ ⊥ $\overline{أب}$ ∴ $\overline{ن}$ • $\overline{أب}$ = صفر

∴ $\overline{ن}$ • ($\overline{ب}$ − $\overline{أ}$) = صفر ، ∵ $\overline{ب}$ = $\overline{ر}$

∴ $\overline{ن}$ • ($\overline{ر}$ − $\overline{أ}$) = صفر ①

∴ $\overline{ن}$ • $\overline{ر}$ − $\overline{ن}$ • $\overline{أ}$ = صفر

∴ $\overline{ن}$ • $\overline{ر}$ = $\overline{ن}$ • $\overline{أ}$ وهي الصورة المتجهة لمعادلة المستوى ومن ①

، ∵ $\overline{ن}$ = (أ، ب، جـ) ، $\overline{ر}$ = (س، ص، ع)

، $\overline{أ}$ = (س$_1$، ص$_1$، ع$_1$)

∴ (أ، ب، جـ) • (س − س$_1$، ص − ص$_1$، ع − ع$_1$) = صفر

∴ أ(س − س$_1$) + ب(ص − ص$_1$) + جـ(ع − ع$_1$) = صفر

وهي الصورة القياسية لمعادلة المستوى

وبفك الأقواس

∴ أ س + ب ص + جـ ع + (− أ س$_1$ − ب ص$_1$ − جـ ع$_1$) = صفر

وبوضع − أ س$_1$ − ب ص$_1$ − جـ ع$_1$ = د

∴ أ س + ب ص + جـ ع + د = صفر

وهي الصورة العامة لمعادلة المستوى

لاحظ أن د = − $\overline{ن}$ • $\overline{أ}$

ومما سبق يتضح أن المستوى ط يتعين بمعرفة نقطة عليه ومتجه عمودي عليه

ومن دراستنا السابقة نتذكر أن المستوى يتعين أيضاً بمعرفة :-

① ثلاث نقاط تقع عليه وليست على استقامة واحدة

② مستقيمان متقاطعان يقعان فيه

③ مستقيم ونقطة لا تنتمي للمستقيم تقعان في المستوى

④ مستقيمين مختلفين متوازيين

ملحوظة: معادلة المستوى المار بالثلاث نقاط (س$_1$، ص$_1$، ع$_1$) ، (س$_2$، ص$_2$، ع$_2$) ، (س$_3$، ص$_3$، ع$_3$) هي

$$\begin{vmatrix} س - س_1 & ص - ص_1 & ع - ع_1 \\ س_2 - س_1 & ص_2 - ص_1 & ع_2 - ع_1 \\ س_3 - س_1 & ص_3 - ص_1 & ع_3 - ع_1 \end{vmatrix} = صفر$$

ملحوظات:

① المستقيمان في الفراغ: عند حل معادلة المستقيمين معاً وكانت:

① مجموعة الحل = ∅ فإن المستقيمين متخالفان أو متوازيان

② مجموعة الحل = نقطة واحدة فإن المستقيمين متقاطعان ويحويهما مستوى واحد

وإذا اشترك المستقيمان في أكثر من نقطة فإنهما ينطبقان

② المستقيم والمستوى في الفراغ: عند حل معادلتي المستقيم والمستوى معاً وكانت

① مجموعة الحل = ∅ فإن المستقيم يوازي المستوى

② مجموعة الحل = نقطة واحدة فإن المستقيم يقطع المستوى في هذه النقطة.

وإذا اشترك مستقيم ومستوى في أكثر من نقطة فإن المستوى يحوي هذا المستقيم

•• معادلة المستوى بمعلومية أطوال الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات:

إذا قطع المستوى محاور الإحداثيات في النقاط $(س_1 ، 0 ، 0)$ ، $(0 ، ص_1 ، 0)$ ، $(0 ، 0 ، ع_1)$ فإن معادلة المستوى هي

$$\begin{vmatrix} س - س_1 & ص & ع \\ -س_1 & ص_1 & 0 \\ -س_1 & 0 & ع_1 \end{vmatrix} = صفر$$

$∴ ص_1 ع_1 (س - س_1) - (-س_1 ع_1) ص + (س_1 ص_1) ع = صفر$

$∴ ص_1 ع_1 س - س_1 ص_1 ع_1 + س_1 ع_1 ص + س_1 ص_1 ع = صفر$

$∴ ص_1 ع_1 س + س_1 ع_1 ص + س_1 ص_1 ع = س_1 ص_1 ع_1$

وبالقسمة على $س_1 ص_1 ع_1$

$$∴ \frac{س}{س_1} + \frac{ص}{ص_1} + \frac{ع}{ع_1} = 1$$

وهي معادلة المستوى بدلالة الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات

ملحوظات هامة:

من المعادلة العامة للمستوى ط:

$أ س + ب ص + جـ ع + د = صفر$ نستنتج أن

- (أ ، ب ، جـ) متجه اتجاه عمودي على المستوى ط ، $د = -\vec{أ} \cdot \vec{ن}$ حيث $\vec{أ}$ متجه موضع لنقطة في المستوى ، $\vec{ن}$ متجه الاتجاه العمودي.
- أي مستوى يوازي المستوى ط يكون المتجه (أ ، ب ، جـ) متجه اتجاه عمودي له أيضاً
- إذا كانت د = صفر فإن المستوى يحوي نقطة الأصل.
- إذا كانت أ = صفر فإن المعادلة تصبح ب ص + جـ ع + د = ٠ وهي معادلة مستوى يوازي محور س وعمودياً على المستوى ص ع
- إذا كانت ب = صفر فإن المعادلة تصبح أ س + جـ ع + د = صفر وهي معادلة مستوى يوازي محور ص وعمودياً على المستوى س ع
- إذا كانت جـ = صفر فإن المعادلة تصبح أ س + ب ص + د = صفر وهي معادلة مستوى يوازي محور ع وعمودياً على المستوى س ص
- إذا كانت أ = د = صفر فإن معادلة المستوى تصبح ب ص + جـ ع = صفر وهي معادلة مستوى يحوي المحور س وعمودياً على المستوى ص ع
- إذا كانتا ب = د = صفر فإن المعادلة تصبح أ س + جـ ع = صفر وهي معادلة مستوى يحوي المحور ص وعمودياً على المستوى س ع
- إذا كانتا جـ = د = صفر فإن المعادلة تصبح أ س + ب ص = صفر وهي معادلة

مستوى يحوى المحور ع وعمودياً على المستوى س ص

• معادلة المستوى س ص هي ع = صفر ، المعادلة ع = م هي معادلة مستوى يوازي المستوى س ص

• معادلة المستوى ص ع هي س = صفر ، المعادلة س = م هي معادلة مستوى يوازي المستوى ص ع

• معادلة المستوى س ع هي ص = صفر ، المعادلة ص = م هي معادلة مستوى يوازي المستوى س ع

• إذا كانت هـ(س$_1$، ص$_1$، ع$_1$) ، و(س$_2$، ص$_2$، ع$_2$) ، ز(س$_3$، ص$_3$، ع$_3$)

ثلاث نقاط في الفراغ وكان التعويض عنهم في معادلة المستوى كالتالي

م س$_1$ + ب ص$_1$ + جـ ع$_1$ + د = صفر ،

م س$_2$ + ب ص$_2$ + جـ ع$_2$ + د $>$ صفر ،

م س$_3$ + ب ص$_3$ + جـ ع$_3$ + د $<$ صفر

فمعنى ذلك أن

هـ(س$_1$، ص$_1$، ع$_1$) $\in$ للمستوى ، و(س$_2$، ص$_2$، ع$_2$) ، ز(س$_3$، ص$_3$، ع$_3$) لا تنتميان للمستوى وكل منهما تقع في جهة مختلفة عن الأخرى بالنسبة للمستوى

صابر عبد الرحيم محمود

ملاحظة: إذا كان (م$_1$، ب$_1$، جـ$_1$) متجه اتجاه للمستقيم ، (م$_2$، ب$_2$، جـ$_2$) متجه اتجاه عمودي على المستوى فإن قياس الزاوية الصغرى بين المستقيم والمستوى يساوي متممة الزاوية θ حيث

جتا θ = $\frac{|(م_1، ب_1، جـ_1)\cdot(م_2، ب_2، جـ_2)|}{\sqrt{م_1^2+ب_1^2+جـ_1^2}\ \sqrt{م_2^2+ب_2^2+جـ_2^2}}$

- أمثلة محلولة -

① أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٢، -٣، ١) والمتجه $\vec{ن}$ = (١، -٢، ٣) عمودي على المستوى

- الحل -

$\because$ $\vec{ن} \cdot \vec{ر} = \vec{ن} \cdot \vec{أ}$

$\therefore$ (١، -٢، ٣) $\cdot \vec{ر}$ = (١، -٢، ٣) $\cdot$ (٢، -٣، ١)

$\therefore$ (١، -٢، ٣) $\cdot \vec{ر}$ = ١١

② أوجد الصورة العامة لمعادلة المستوى المار بنقطة الأصل والمتجه $\vec{ن}$ = $\vec{س}$ + ٢$\vec{ص}$ − ٣$\vec{ع}$ عمودي عليه

- الحل -

$\because$ $\vec{ن}$ = (١، ٢، -٣)

$\therefore$ (١، ٢، -٣) $\cdot \vec{ر}$ = (١، ٢، -٣) $\cdot$ (٠، ٠، ٠)

$\therefore$ س + ٢ص − ٣ع = صفر

③ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (-٣، ٤، ٢) والمتجه $\vec{ن}$ = (١، -١، ٣) عمودي على المستوى

- الحل -

(١، -١، ٣) $\cdot \vec{ر}$ = (١، -١، ٣) $\cdot$ (-٣، ٤، ٢)

$\therefore$ (١، -١، ٣) $\cdot \vec{ر}$ = -١　الصورة المتجهة

١(س + ٢) − (ص − ٤) + ٣(ع − ٢) = صفر

الصورة القياسية

$\therefore$ س − ص + ٣ع + ١ = صفر

الصورة العامة

④ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (١، -١، ٤) والمتجه ن = (٢، -٣، ٤) عمودي عليه ثم بين
① هل النقطة (٢، ٢، ١) تقع في المستوى
② هل المتجه ى = (٣، -٥، -٢) يوازي المستوى

- الحل -

(٢، -٣، ٤) • ر = (٢، -٣، ٤) • (١، -١، ٤)

∴ (٢، -٣، ٤) • ر = ٢١ الصورة المتجهة

٢(س - ١) - ٣(ص + ١) + ٤(ع - ٤) = صفر
الصورة القياسية

∴ ٢س - ٣ص + ٤ع - ٢١ = صفر
الصورة العامة

① بالتعويض بالنقطة (٢، ٢، ١)

∴ ٢×٢ - ٣×٢ + ٤×١ - ٢١ ≠ صفر

∴ النقطة ∉ المستوى

② ∵ (٣، -٥، -٢) • (٢، -٣، ٤)

= ٦ + ١٥ - ٨ = ١٣ ≠ صفر

∴ المتجه ى لا يوازي المستوى

⑤ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى الذي يقطع من محاور الإحداثيات س، ص، ع الأجزاء ٢، ٤، ٥ على الترتيب

- الحل -

س/٢ + ص/٤ + ع/٥ = ١   × ٢٠

∴ ١٠س + ٥ص + ٤ع - ٢٠ = صفر
الصورة العامة

∵ المستوى يمر بالنقطة (٢، ٠، ٠)

∴ (١٠، ٥، ٤) • ر = (١٠، ٥، ٤) • (٢، ٠، ٠)

∴ (١٠، ٥، ٤) • ر = ٢٠ الصورة المتجهة

∴ ١٠(س - ٢) + ٥ص + ٤ع = صفر الصورة القياسية

⑥ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقط (١، ٠، ٠)، (٠، ٢، ٠)، (٠، ٠، ٣)

- الحل -

س/١ + ص/٢ + ع/٣ = ١   × ٦

∴ ٦س + ٣ص + ٢ع = ٦
الصورة العامة

∵ المستوى يمر بالنقطة (١، ٠، ٠)

∴ (٦، ٣، ٢) • ر = (٦، ٣، ٢) • (١، ٠، ٠)

∴ (٦، ٣، ٢) • ر = ٦ الصورة المتجهة

∴ ٦(س - ١) + ٣ص + ٢ع = صفر
الصورة القياسية

⑦ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالثلاث نقط أ(٢، -١، صفر)، ب(-١، ٣، ٤)، جـ(٣، ٠، ٢)

- الحل -

س - ٢	ص + ١	ع
-٣	٤	٤
١	١	٢

= صفر

∴ ٤(س - ٢) + ١٠(ص + ١) - ٧ع = صفر
الصورة القياسية

∴ ٤س + ١٠ص - ٧ع + ٢ = صفر
الصورة العامة

∴ (٤، ١٠، -٧) • ر = -٢
الصورة المتجهة

⑧ أوجد ثلاث نقط في الفراغ تقع على كل من المستويات الآتية:

① س = ٣   ② ص = -٢

③ س + ٣ص = ٥   ④ ٢س - ص + ٣ع = ٤

- الحل -

① (٣ ، ٠ ، ٠) ، (٣ ، ٤ ، ٥) ، (٣ ، ٩ ، ١٢)

② (٥ ، -٢ ، ٧) ، (٨ ، -٢ ، ٠) ، (١٠ ، -٢ ، -٩)

③ (٥ ، ٠ ، ٧) ، (٠ ، ٥/٣ ، ١١) ، (-١ ، ٢ ، ٩)

④ (٠ ، ٠ ، ٤/٣) ، (٠ ، -٤ ، ٠) ، (٢ ، ٠ ، ٠)

ملاحظة : توجد إجابات أخرى

⑨ إذا مر المستوى ٢م س - ٣م ص + ٤م ع + ٦ = صفر بمنتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزي الكرتين

س² + ص² + ع² + ٦س - ٨ص - ٢ع = ١٣

، س² + ص² + ع² - ١٠س + ٤ص - ٢ع = ٨

فما قيمة م

- الحل -

م١ = (-٣ ، ٤ ، ١) ، م٢ = (٥ ، -٢ ، ١)

∴ منتصف م١م٢ = ((-٣+٥)/٢ ، (٤-٢)/٢ ، (١+١)/٢)

= (١ ، ١ ، ١)

∴ ٢م - ٣م + ٤م + ٦ = صفر

∴ ٣م = -٦ ∴ م = -٢

⑩ عين موضع كل من النقط م(٣ ، -٢ ، ٥) ، ب(-٤ ، ١ ، صفر) ، ج(٦ ، ٥ ، -١) ، ء(-٣ ، -٥ ، ٢) ، هـ(٤ ، -٧ ، ١٠) بالنسبة للمستوى ٢س - ٣ص + ٤ع - ٥ = صفر

- الحل -

بالتعويض بالنقطة م

٢×٣ - ٣×-٢ + ٤×٥ - ٥ = ٢٧

∴ م ∉ المستوى

بالتعويض بالنقطة ب

٢×-٤ - ٣×١ - ٥ = -١٦

∴ ب ∉ المستوى

بالتعويض بالنقطة ج

٢×٦ - ٣×٥ + ٤×-١ - ٥ = -١٢

∴ ج ∉ المستوى

بالتعويض بالنقطة ء

٢×-٣ - ٣×-٥ + ٤×٢ - ٥ = ١٢

∴ ء ∉ المستوى

بالتعويض بالنقطة هـ

٢×٤ - ٣×-٧ + ٤×١٠ - ٥ = ٦٤

∴ هـ ∉ المستوى

∴ النقط م ، ء ، هـ تقع في نفس الجهة من المستوى بينما النقطتان ب ، ج تقعان في الجهة الأخرى من المستوى

⑪ اكتب معادلة المستوى ٢س + ص - ٣ع - ٣٦ = صفر بدلالة الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات

- الحل -

∵ ٢س + ص - ٣ع = ٣٦ ÷ ٣٦

∴ س/١٨ + ص/٣٦ + ع/-١٢ = ١

⑫ أوجد الأجزاء التي يقطعها المستوى ٢س + ٣ص - ع = ٦ من محاور الإحداثيات

- الحل -

∵ ٢س + ٣ص - ع = ٦ ÷ ٦

∴ س/٣ + ص/٢ + ع/-٦ = ١

∴ المستوى يقطع من محاور الإحداثيات س ، ص ، ع الأجزاء ٣ ، ٢ ، -٦ على الترتيب

⑭ إذا قطع المستوى محاور الإحداثيات في النقط أ، ب، جـ وكانت النقطة (م، ن، و) هي نقطة تقاطع متوسطات △ أ ب جـ أثبت أن معادلة المستوى هي $\frac{\text{س}}{\text{م}} + \frac{\text{ص}}{\text{ن}} + \frac{\text{ع}}{\text{و}} = ٣$

- الحل -

∵ (م، ن، و) هي نقطة تلاقي متوسطات △ أ ب جـ

∴ (م، ن، و) $= \left(\frac{\text{ك}+٠+٠}{٣} ، \frac{٠+\text{ل}+٠}{٣} ، \frac{٠+٠+\text{هـ}}{٣}\right)$

∴ ك = ٣م ، ل = ٣ن ، هـ = ٣و

∴ معادلة المستوى هي

$\frac{\text{س}}{\text{ك}} + \frac{\text{ص}}{\text{ل}} + \frac{\text{ع}}{\text{هـ}} = ١$

∴ $\frac{\text{س}}{٣\text{م}} + \frac{\text{ص}}{٣\text{ن}} + \frac{\text{ع}}{٣\text{و}} = ١$ ×٣

∴ $\frac{\text{س}}{\text{م}} + \frac{\text{ص}}{\text{ن}} + \frac{\text{ع}}{\text{و}} = ٣$

⑮ إذا قطع المستوى ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢ محاور الإحداثيات س، ص، ع في النقط أ، ب، جـ على الترتيب.
احسب مساحة △ أ ب جـ

- الحل -

∵ ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢
بالقسمة على ١٢

∴ $\frac{\text{س}}{٤} + \frac{\text{ص}}{٦} + \frac{\text{ع}}{٣} = ١$

∴ أ(٤، ٠، ٠) ، ب(٠، ٦، ٠) ، جـ(٠، ٠، ٣)

∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = ب − أ = (−٤، ٦، صفر)

∵ $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = جـ − أ = (−٤، صفر، ٣)

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -٤ & ٦ & \text{صفر} \\ -٤ & \text{صفر} & ٣ \end{vmatrix}$

$= ١٨\overrightarrow{\text{س}} + ١٢\overrightarrow{\text{ص}} + ٢٤\overrightarrow{\text{ع}}$

∴ $\|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}}\| = \sqrt{(١٨)^2 + (١٢)^2 + (٢٤)^2}$

$= ٦\sqrt{٢٩}$

∴ مساحة △ أ ب جـ = $\frac{١}{٢} \|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}}\|$

= $٣\sqrt{٢٩}$ وحدة مربعة

⑯ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1 ، \text{ع}_1)$ عمودياً على المستوى
أس + ب ص + جـ ع + د = صفر

- الحل -

$\overrightarrow{\text{ن}}$ = (أ، ب، جـ)

∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب = (أ، ب، جـ)

∴ معادلة المستقيم هي

$\overrightarrow{\text{ر}} = (\text{س}_1 ، \text{ص}_1 ، \text{ع}_1) + \text{ك}(\text{أ} ، \text{ب} ، \text{جـ})$

⑰ أوجد معادلة المستوى:

① الموازي للمستوى س − ٢ص + ٢ع = ١ والمار بالنقطة (١، −١، ٢)

- الحل -

∵ المستويان متوازيان

∴ $\overrightarrow{\text{ن}_1} = \overrightarrow{\text{ن}_2}$ = (١، −٢، ٢)

∴ معادلة المستوى $\overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$

∴ (١، −٢، ٢) . $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (١، −٢، ٢) . (١، −١، ٢)

∴ (١، −٢، ٢) . $\overrightarrow{\text{ر}}$ = ٧

∴ (١، −٢، ٢) . (س، ص، ع) = ٧

∴ س − ٢ص + ٢ع − ٧ = صفر

② المار بالنقطتين أ(١، ٢، -٣)، ب(٢، ٣، -٤) وعمودياً على المستوى س + ص + ع + ١ = صفر

- الحل -

$\vec{ن}_1 = \overrightarrow{أب} = ب - أ = (1، 1، -1)$

، $\vec{ن}_2 = (1، 1، 1)$

$$\therefore \vec{ن}_1 \times \vec{ن}_2 = \begin{vmatrix} \hat{س} & \hat{ص} & \hat{ع} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\hat{س} - 2\hat{ص}$$

$\therefore \vec{ن} = (2، -2، 0)$ ، أ $= (1، 2، -3)$

∴ معادلة المستوى المطلوب $\vec{ن} \cdot \vec{ر} = \vec{ن} \cdot \vec{أ}$

$\therefore (2، -2، 0) \cdot \vec{ر} = (2، -2، 0) \cdot (1، 2، -3)$

$\therefore (2، -2، 0) \cdot \vec{ر} = -2$

$\therefore (2، -2، 0) \cdot (س، ص، ع) = -2$

∴ ٢س - ٢ص + ٢ = صفر

③ المار بالنقطتين (١، -٢، ٥)، (٢، ٢، ٣) ويوازي المتجه $\vec{م} = (3، -1، 0)$

- الحل -

$\vec{ن}_1 = (1، -2، 5) - (2، 2، 3) = (-1، -4، 2)$

، $\vec{ن}_2 = (3، -1، \text{صفر})$

$$\therefore \vec{ن} = \vec{ن}_1 \times \vec{ن}_2 = \begin{vmatrix} \hat{س} & \hat{ص} & \hat{ع} \\ -1 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & \text{صفر} \end{vmatrix}$$

$= 2\hat{س} + 6\hat{ص} + 13\hat{ع}$

∴ معادلة المستوى المطلوب $\vec{ن} \cdot \vec{ر} = \vec{ن} \cdot \vec{أ}$

$(2، 6، 13) \cdot \vec{ر} = (2، 6، 13) \cdot (1، -2، 5)$

$(2، 6، 13) \cdot \vec{ر} = 55$

$(2، 6، 13) \cdot (س، ص، ع) = 55$

٢س + ٦ص + ١٣ع - ٥٥ = صفر

④ المار بالنقطة (٤، -١، ٢) ويحوي المحور س

- الحل -

$\vec{ن} = (4، -1، 2) \times (1، 0، 0)$

$$= \begin{vmatrix} \hat{س} & \hat{ص} & \hat{ع} \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\hat{ص} + \hat{ع}$$

∴ معادلة المستوى المطلوب $\vec{ن} \cdot \vec{ر} = \vec{ن} \cdot \vec{أ}$

$(0، 2، 1) \cdot \vec{ر} = (0، 2، 1) \cdot (4، -1، 2)$

$(0، 2، 1) \cdot \vec{ر} = \text{صفر}$

∴ ٢ص + ع = صفر

حل آخر

∵ المستوى يحوي محور السينات

∴ معادلته هي ب ص + جـ ع = صفر

∴ $\frac{ب}{جـ}$ ص + ع = صفر

∵ المستوى يمر بالنقطة (٤، -١، ٢)

∴ $\frac{ب}{جـ} \times -1 + 2 = \text{صفر}$ ∴ $\frac{ب}{جـ} = 2$

∴ معادلة المستوى هي ٢ص + ع = صفر

⑤ الذي مسقط نقطة الأصل عليه هي النقطة (٢، ٣، -٥)

- الحل -

∵ مسقط نقطة الأصل على المستوى هو (٢، ٣، -٥)

$\therefore \vec{ن} = (2، 3، -5) - (0، 0، 0) = (2، 3، -5)$

∴ معادلة المستوى المطلوب $\vec{ن} \cdot \vec{ر} = \vec{ن} \cdot \vec{أ}$

$(2، 3، -5) \cdot \vec{ر} = (2، 3، -5) \cdot (2، 3، -5)$

$(2، 3، -5) \cdot \vec{ر} = 38$

$(2، 3، -5) \cdot (س، ص، ع) = 38$

∴ ٢س + ٣ص - ٥ع - ٣٨ = صفر

⑥ الذي يقطع من محاور الإحداثيات س، ص، ع الأجزاء ٢، -٣، ٥ على الترتيب

- الحل -

معادلة المستوى هي

$$\frac{س}{٢} + \frac{ص}{-٣} + \frac{ع}{٥} = ١$$

⑦ المار بالنقطة (٣، ٥، -٧) والذي يقطع المحاور الإحداثية بقطع متساوية

- الحل -

نفرض أن طول الجزء المقطوع من محاور الإحداثيات = أ

∴ معادلة المستوى هي

$$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{أ} + \frac{ع}{أ} = ١$$

∵ (٣، ٥، -٧) ∈ للمستوى

∴ $\frac{٣}{أ} + \frac{٥}{أ} + \frac{-٧}{أ} = ١$ ∴ أ = ١

∴ معادلة المستوى المطلوب هي

س + ص + ع = ١

⑧ المار بالنقطتين أ(٣، ٥، ١)، ب(٧، ٧، ٨) والقاطع للمحورين س، ص بقطعتين متساويتين

- الحل -

نفرض أن طول الجزء المقطوع من محوري الإحداثيات س، ص = ل، الجزء المقطوع من المحور ع = م

∴ معادلة المستوى هي

$$\frac{س}{ل} + \frac{ص}{ل} + \frac{ع}{م} = ١$$

∵ (٣، ٥، ١) ∈ للمستوى

∴ $\frac{٣}{ل} + \frac{٥}{ل} + \frac{١}{م} = ١$

∴ $\frac{٨}{ل} + \frac{١}{م} = ١$ ∴ $\frac{١}{م} = ١ - \frac{٨}{ل}$

∴ $\frac{٨}{م} = ٨ - \frac{٦٤}{ل}$ ① ، ∵ (٧، ٧، ٨) ∈ للمستوى

∴ $\frac{٧}{ل} + \frac{٧}{ل} + \frac{٨}{م} = ١$

∴ $\frac{١٤}{ل} + \frac{٨}{م} = ١$ ∴ $\frac{٨}{م} = ١ - \frac{١٤}{ل}$ ②

من ①، ② ينتج أن

$٨ - \frac{٦٤}{ل} = ١ - \frac{١٤}{ل}$ ∴ $\frac{٧}{١} = \frac{٥٠}{ل}$

∴ ل = $\frac{٥٠}{٧}$ وبالتعويض ∴ م = $\frac{-٢٥}{٣}$

∴ معادلة المستوى هي

$$\frac{س}{\frac{٥٠}{٧}} + \frac{ص}{\frac{٥٠}{٧}} + \frac{ع}{\frac{-٢٥}{٣}} = ١$$

أي أن

$$\frac{٧س}{٥٠} + \frac{٧ص}{٥٠} - \frac{٣ع}{٢٥} = ١$$

⑨ العمودي على المستوى ٢س - ٢ص + ٤ع - ٥ = صفر ويقطع المحورين س، ص في (-٢، ٠، ٠)، (٠، $\frac{٤}{٣}$، ٠)

- الحل -

معادلة المستوى المطلوب هي

$$\frac{س}{-٢} + \frac{ص}{\frac{٤}{٣}} + \frac{ع}{ل} = ١$$

∴ ($\frac{١}{-٢}$، $\frac{٣}{٤}$، $\frac{١}{ل}$) متجه اتجاه عمودي للمستوى ، ∵ المستوى المطلوب عمودياً ع المستوى ٢س - ٢ص + ٤ع - ٥ = صفر

∴ ($\frac{١}{-٢}$، $\frac{٣}{٤}$، $\frac{١}{ل}$) • (٢، -٢، ٤) = صفر

∴ -١ - ٣ + $\frac{٤}{ل}$ = صفر ∴ ل = ١

∴ معادلة المستوى المطلوب هي

$\frac{س}{-٢} + \frac{ص}{\frac{٤}{٣}} + ع = ١$ بالضرب × ٢

∴ -س + ٣ص + ٢ع - ٢ = صفر

(١٧) الذى يقطع جزءاً مقداره ٣ وحدات من الجزء السالب لمحور س وجزءاً مقداره ٢ وحدة من الجزء الموجب لمحور ع ويمر بالنقطة (٦، -١٠، ١)

- الحل -

معادلة المستوى المطلوب هى:

$\frac{س}{-٣} + \frac{ص}{ل} + \frac{ع}{٢} = ١$

∵ المستوى يمر بالنقطة (٦، -١٠، ١)

∴ $\frac{٦}{-٣} + \frac{-١٠}{ل} + \frac{١}{٢} = ١$

∴ ل = -٤

∴ المعادلة المطلوبة هى

$\frac{س}{-٣} + \frac{ص}{-٤} + \frac{ع}{٢} = ١$

---

(١٨) اثبت أن المستقيمين

$\vec{ر}_1 = (٣\vec{س} + \vec{ص} - \vec{ع}) + ل_1(\vec{س} + ٢\vec{ص} + ٣\vec{ع})$

$\vec{ر}_2 = (٢\vec{س} + ٥\vec{ص}) + ل_2(\vec{س} - \vec{ص} + \vec{ع})$

متقاطعان وأوجد معادلة المستوى الذى يحتويهما

- الحل -

يتقاطع المستقيمان عندما $\vec{ر}_1 = \vec{ر}_2$

∴ (٣، ١، -١) + $ل_1$ (١، ٢، ٣)

= (٢، ٥، ٠) + $ل_2$ (١، -١، ١)

∴ $ل_1 - ل_2 = -١$ ①

، $٢ل_1 + ل_2 = ٤$ ②

، $٣ل_1 - ل_2 = ١$ ③

من ①، ② ينتج أن

$ل_1 = ١$ ، $ل_2 = ٢$

وبالتعويض فى المعادلة ③

∴ ٣ × ١ - ٢ = ١ (تحقق)

∴ المستقيمان متقاطعان

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستقيمين المتقاطعين

$= \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & -١ & ١ \end{vmatrix} = (٥، ٢، -٣)$

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى

(٥، ٢، -٣) . $\vec{ر}$ = (٥، ٢، -٣) . (٣، ١، -١)

∴ ٥س + ٢ص - ٣ع - ٢٠ = صفر

---

(١٩) اثبت أن المستقيمين

$ل_1$: ٢س = ٣ص = ٤ع ،

$ل_2$: ٣س = ٢ص = ٥ع متقاطعان

ثم أوجد معادلة المستوى الذى يحتويهما

- الحل -

∵ $ل_1$: ٢س = ٣ص = ٤ع

، $ل_2$: ٣س = ٢ص = ٥ع

يمران بنقطة الأصل ∴ المستقيمان متقاطعان

∴ متجه الاتجاه العمودى على مستويهما

$= \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ \frac{١}{٢} & \frac{١}{٣} & \frac{١}{٤} \\ \frac{١}{٣} & \frac{١}{٢} & \frac{١}{٥} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٦ & ٤ & ٣ \\ ١٠ & ١٥ & ٦ \end{vmatrix}$

= (-٢١، -٦، ٥٠)

∴ معادلة المستوى المطلوب هى

$\vec{ر}$. (-٢١، -٦، ٥٠) = صفر

(المستوى يمر بنقطة الأصل)

(٢٠) أوجد معادلة المستوى الذي يحتوي المستقيم $ل_١$: ر = (٠، ٣، -٥) + $ك_١$(٦، -٢، -١) ويوازي المستقيم $ل_٢$: ر = (١، ٧، -٤) + $ك_٢$(١، -٣، ٣)

- الحل -

متجه الاتجاه العمودي على المستوى

$$= \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ٦ & -٢ & -١ \\ ١ & -٣ & ٣ \end{vmatrix} = (-٩، -١٩، -١٦)$$

∵ المستوى يحوي المستقيم

ر = (٠، ٣، -٥) + $ك_١$(٦، -٢، -١)

∴ المستوى يحوي النقطة (٠، ٣، -٥)

∴ المعادلة المطلوبة هي

ر . (-٩، -١٩، -١٦) = (٠، ٣، -٥) . (-٩، -١٩، -١٦)

∴ -٩س - ١٩ص - ١٦ع - ٢٣ = صفر

---

(٢١) أوجد معادلة المستوى الذي يحوي كلاً من المستقيم $\frac{س+١}{-٣} = \frac{ص-٣}{٢} = \frac{ع+٢}{١}$ والنقطة (٠، ٧، -٧)

- الحل -

∵ النقطة (-١، ٣، -٢) تقع على المستقيم

∴ (-١، ٣، -٢) ∈ للمستوى المطلوب

∴ المتجه (-١، ٣، -٢) - (٠، ٧، -٧)

= (-١، -٤، ٥) يقع في المستوى

∴ متجه الاتجاه العمودي على المستوى

$$= \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ -١ & -٤ & ٥ \\ -٣ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = (-١٤، -١٤، -١٤)$$

∴ المتجه (١، ١، ١) متجه اتجاه عمودي على المستوى

∴ معادلة المستوى المطلوب هي

ر . (١، ١، ١) = (١، ١، ١) . (٠، ٧، -٧)

∴ س + ص + ع = صفر

---

(٢٢) أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (-١، ٣، ٢) ويكون عمودياً على كل من المستويين س + ٢ص + ٣ع = ٥ ، ٣س + ٣ص + ع = ٩

- الحل -

متجه الاتجاه العمودي على المستوى المطلوب

$$= \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ٣ & ١ \end{vmatrix} = (-٧، ٨، -٣)$$

∴ معادلة المستوى المطلوبة هي

ر . (-٧، ٨، -٣) = (-١، ٣، ٢) . (-٧، ٨، -٣)

∴ -٧س + ٨ص - ٣ع - ٢٥ = صفر

---

(٢٣) اكتب المعادلة العامة للمستوى

س = ٢ + ٢$ك_١$ - ٤$ك_٢$ ، ص = ٤ - $ك_٢$ ، ع = ٢ + ٣$ك_١$

- الحل -

∵ ع = ٢ + ٣$ك_١$ ∴ $ك_١ = \frac{ع-٢}{٣}$

∵ ص = ٤ - $ك_٢$ ∴ $ك_٢$ = ٤ - ص

∴ س = ٢ + ٢ × $\frac{ع-٢}{٣}$ - ٤(٤ - ص)

∴ ٣س = ٦ + ٢ع - ٤ - ٤٨ + ١٢ص

∴ ٣س - ١٢ص - ٢ع + ٤٦ = صفر

---

(٢٤) أوجد المعادلة الإحداثية للمستوى الذي معادلته (س، ص، ع) = (٢، ٣، ٥) + $ك_١$(-١، ٣، ٤) + $ك_٢$(٦، ١، -٢) حيث $ك_١$ ، $ك_٢$ بارامترات

- الحل -

س = ٢ − ل١ + ٦ل٢ ①

ص = ٣ + ٣ل١ + ل٢ ②

ع = ٥ + ٤ل١ − ٢ل٢ ③

بضرب المعادلة ① × ٣ والجمع مع المعادلة ② ينتج أن

٣س + ص = ٩ + ١٩ل٢

$$∴ ل٢ = \frac{٣س + ص − ٩}{١٩} \quad ④$$

وبضرب المعادلة ② × −٦ والجمع مع المعادلة ① ينتج أن

س − ٦ص = −١٦ − ١٩ل١

$$∴ ل١ = \frac{−(س − ٦ص + ١٦)}{١٩} \quad ⑤$$

وبالتعويض من ④ ، ⑤ في ③

$$∴ ع = ٥ + \frac{−٤س + ٢٤ص − ٦٤}{١٩} + \frac{−٦س − ٢ص + ١٨}{١٩}$$

∴ ١٩ع = ٩٥ − ٤س + ٢٤ص − ٦٤ − ٦س − ٢ص + ١٨

∴ ١٠س − ٢٢ص + ١٩ع − ٤٩ = صفر

(٢٥) اثبت أن المستقيم

$$\frac{س − ٣}{٥} = \frac{ص + ١}{٥} = \frac{ع + ٤}{٧}$$ يقع في المستوى ٣س + ٤ص − ٥ع = ٢٥

- الحل -

∵ (٥ ، ٥ ، ٧) متجه اتجاه المستقيم

، (٣ ، ٤ ، −٥) متجه اتجاه عمودي على المستوى

، ∵ (٥ ، ٥ ، ٧) · (٣ ، ٤ ، −٥) = صفر

∴ المستقيم يوازي المستوى

، ∵ (٣ ، −١ ، −٤) تقع على المستقيم وبالتعويض بها في معادلة المستوى

∴ ٣×٣ + ٤×−١ − ٥×−٤ = ٢٥ تحقق المعادلة

∴ المستقيم يقع في المستوى

(٢٦) اثبت أن النقطة م(٢ ، ٣ ، ١) والمستقيم ل : رَ = (٣سَ + صَ + ٣عَ) + ك(سَ − ٢صَ + ٢عَ) يقعان في المستوى الذي معادلته رَ · (٢سَ − عَ) = ٣

- الحل -

بالتعويض بالنقطة م(٢ ، ٣ ، ١) في معادلة المستوى

∴ (٢ ، ٣ ، ١) · (٢ ، ٠ ، −١) = ٤ − ١ = ٣ تحقق

∴ م(٢ ، ٣ ، ١) تقع في المستوى

، ∵ (١ ، −٢ ، ٢) متجه اتجاه المستقيم ،

(٢ ، ٠ ، −١) متجه اتجاه عمودي على المستوى

، ∵ (١ ، −٢ ، ٢) · (٢ ، ٠ ، −١) = صفر

∴ المستقيم يوازي المستوى

، ∵ (٣ ، ١ ، ٣) ∈ المستقيم وبالتعويض بها في معادلة المستوى

∴ (٣ ، ١ ، ٣) · (٢ ، ٠ ، −١) = ٦ − ٣ = ٣ تحقق

∴ المستقيم يقع في المستوى

(٢٦) اثبت أن المستقيم رَ = عَ + ك(٢سَ + ٣صَ + ٤عَ) عمودي على المستوى

$$س + \frac{٣}{٢}ص + ٢ع = ٥$$

- الحل -

∵ المتجه (٢ ، ٣ ، ٤) هو متجه اتجاه المستقيم

، ∵ المتجه (١ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ٢) هو متجه اتجاه عمودي على المستوى ، ∵ $\frac{٢}{١} = \frac{٣}{\frac{٣}{٢}} = \frac{٤}{٢}$

∴ المتجهان متوازيان

∴ المستقيم عمودي على المستوى

(٢٧) إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ يوازي المستوى
٢س + ص − ع + ١ = صفر حيث
أ(−١ ، −٢ ، ل) ، ب(٢ ، ٠ ، م) أوجد
قيمة م − ل

- الحل -

∵ (٢ ، ١ ، −١) متجه اتجاه عمودي على المستوى
، د = $\overrightarrow{أب}$ = (٢ ، ٠ ، م) − (−١ ، −٢ ، ل)
= (٣ ، ٢ ، م − ل)
∴ (٢ ، ١ ، −١) • (٣ ، ٢ ، م − ل) = صفر
∴ ٦ + ٢ − م + ل = صفر
∴ −م + ل = −٨ ∴ م − ل = ٨

(٢٨) أوجد قياس الزاوية بين المستقيم
ر = (س + ٢ص − ع) + ل(س − ص + ع)
والعمودي على المستوى
ر • (٢س − ص + ع) = ٤

- الحل -

∵ (١ ، −١ ، ١) متجه اتجاه المستقيم
، (٢ ، −١ ، ١) متجه اتجاه عمودي على المستوى
ولنفرض أن θ قياس الزاوية بينهما

$$\therefore \text{جتا}\,\theta = \frac{|(١ ، −١ ، ١) \cdot (٢ ، −١ ، ١)|}{\sqrt{١+١+١}\ \sqrt{٤+١+١}} = \frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$$

∴ θ = ٢٨ً ٥٢َ ٦١°

(٢٩) أوجد الزاوية بين المستقيم

$$\frac{س+١}{٣} = \frac{ص-١}{٢} = \frac{ع-٢}{٤}$$

والمستوى ٢س + ص − ٣ع + ٤ = صفر

- الحل -

∵ (٣ ، ٢ ، ٤) متجه اتجاه المستقيم
، (٢ ، ١ ، −٣) متجه اتجاه عمودي على المستوى

$$\therefore \text{جتا}\,\theta = \frac{|(٣ ، ٢ ، ٤) \cdot (٢ ، ١ ، −٣)|}{\sqrt{٩+٤+١٦}\ \sqrt{٤+١+٩}} = \frac{٤}{\sqrt{٢٩}\ \sqrt{١٤}}$$

∴ ق(θ) = ٣٣َ ٧٨°
وهي الزاوية بين متجه اتجاه المستقيم والمتجه العمودي على المستوى
∴ قياس الزاوية الصغرى بين المستقيم والمستوى = ٩٠° − ٣٣َ ٧٨° = ٢٧َ ١١°

(٣٠) أوجد نقطة تقاطع المستقيم س = ص = ع
مع المستوى س + ٢ص + ٣ع = ١٢

- الحل -

لنفرض أن س = ص = ع = ل
وبالتعويض في معادلة المستوى
∴ ل + ٢ل + ٣ل = ١٢
∴ ٦ل = ١٢ ∴ ل = ٢
∴ النقطة هي (٢ ، ٢ ، ٢)

(٣١) أوجد نقطة تقاطع المستقيم

$$\frac{س+٨}{٩} = \frac{ص-١٠}{-٤} = \frac{ع-٩}{-٢}$$

مع المستوى ٣س + ٤ص + ٥ع = ٧٦

- الحل -

من معادلة المستقيم ولنفرض أن

$$\frac{س+٨}{٩} = \frac{ص-١٠}{-٤} = \frac{ع-٩}{-٢} = ل$$

∴ س = −٨ + ٩ل ، ص = ١٠ − ٤ل
، ع = ٩ − ٢ل
وبالتعويض في معادلة المستوى
∴ ٣(−٨ + ٩ل) + ٤(١٠ − ٤ل) + ٥(٩ − ٢ل) = ٧٦
∴ −٢٤ + ٢٧ل + ٤٠ − ١٦ل + ٤٥ − ١٠ل = ٧٦
∴ ل = ١٥ ∴ نقطة التقاطع هي
(−٨ + ٩×١٥ ، ١٠ − ٤×١٥ ، ٩ − ٢×١٥)
= (١٢٧ ، −٥٠ ، −٢١)

(٣٢) أوجد نقطة تقاطع المستقيم

ر = (١، ٤، ٢) + ك(٣، ٢، ٢) مع المستوى

(٣، ٢، ٢) • ر = -٢

- الحل -

بالتعويض عن ر من معادلة المستقيم في معادلة المستوى

∴ (٣، ٢، ٢) • [(١، ٤، ٢) + ك(٣، ٢، ٢)] = -٢

∴ (٣، ٢، ٢) • (١ + ٣ك ، ٤ + ٢ك ، ٢ + ٢ك) = -٢

∴ ٣ + ٩ك + ٨ + ٤ك + ٤ + ٤ك = -٢

∴ ١٧ك + ١٥ = -٢ ∴ ١٧ك = -١٧

∴ ك = -١

∴ نقطة التقاطع هي (-٢، ٢، صفر)

---

(٣٣) أوجد احداثيات نقطة تقاطع المستقيم

ر = ع + ك(٢س + ص + ع) مع

المستوى ر • س = ٤

- الحل -

معادلة المستقيم هي

ر = (٠، ٠، ١) + ك(٢، ١، ١)

، معادلة المستوى هي ر • (١، ٠، ٠) = ٤

وبالتعويض من معادلة المستقيم في معادلة المستوى

∴ (٢ك ، ك ، ١ + ك) • (١، ٠، ٠) = ٤

∴ ٢ك = ٤ ∴ ك = ٢

∴ نقطة التقاطع هي (٤، ٢، ٣)

---

(٣٤) أوجد احداثيات نقطة تقاطع المستقيم المار بالنقطتين (٣، -٤، -٥)، (٢، -٣، ١) مع المستوى المار بالنقط (٢، ٢، ١)، (٣، ٠، ١)، (٤، -١، ٠)

- الحل -

متجه اتجاه المستقيم = (١، -١، -٦)

∴ معادلة المستقيم

ر = (٢، -٣، ١) + ك(١، -١، -٦)

ومعادلة المستوى هي

س - ٢	ص - ٢	ع - ١
٣ - ٢	٠ - ٢	١ - ١
٤ - ٢	-١ - ٢	٠ - ١

= صفر

∴

س - ٢	ص - ٢	ع - ١
١	-٢	صفر
٢	-٣	-١

= صفر

∴ ٢(س - ٢) + (ص - ٢) + (ع - ١) = صفر

∴ ٢س + ص + ع - ٧ = صفر

ومن معادلة المستقيم

∴ س = ٢ + ك ، ص = -٣ - ك ،

ع = ١ - ٦ك

وبالتعويض في معادلة المستوى

∴ ٤ + ٢ك - ٣ - ك + ١ - ٦ك - ٧ = صفر

∴ -٥ك = ٥ ∴ ك = -١

∴ نقطة التقاطع هي (١، -٢، ٧)

- تمارين عامة -

① أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالثلاث نقط ل(١، ٣، ٥)، م(-١، ٢، ٤)، ن(٤، ٤، صفر)

② هل تقع النقطة أ(٢، -١، ١) ونقطة الأصل في جهة واحدة أم جهتين مختلفتين بالنسبة إلى كل من المستويات التالية:

① ٥س - ٣ص + ع - ١٨ = صفر

② ٢س + ٧ص + ٣ع + ١ = صفر

③ أوجد معادلة المستوى:

① المار بالنقطة (١، ٢، ٣) موازياً المتجهين (٢، ١، -١)، (٣، ٦، -٢)

② المار بالنقطة (١، ٤، ٣) وعمودياً على المستويين ٢س + ٤ص + ٧ع = ٤، س - ص + ٢ع = ٣

③ المار بالنقاط (-٣، ٠، ٠)، (٠، ٠، ٥)، (٠، ٢، ٠)

④ القاطع لمحور س في النقطة (٥، ٠، ٠) ولمحور ص في النقطة (٠، -٧، ٠) والمار بالنقطة (١، ١، ٢)

⑤ أوجد معادلة المستوى الذي يحوي المستقيم س = (ص - ٣)/٢ = (ع - ٥)/٣ ويكون عمودياً مع المستوى ٢س + ٧ص - ٣ع = ١

⑤ أوجد معادلة المستوى المار بنقطة الأصل وعمودياً على كل من المستويين س + ٢ص - ع = ١، ٣س - ٤ص + ع = ٥

⑥ أوجد معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة (٢، ١، ٤) وعمودي على المستقيم المار بالنقطتين (٣، ٢، ٥)، (١، ٦، ٤)

⑦ إذا كان المستقيم (س - ١)/٢ = (ص + ٣)/-١ = ع/٣ يقطع المستوى ٣س + ٢ص + ع - ٨ = صفر في نقطة أوجد قياس زاوية ميل المستقيم على المستوى

⑧ أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم ر = (٢، -١، ٢) + ك(٣، ٤، ٢) مع المستوى ر · (١، -١، ١) = ٥

⑨ أوجد نقطة تقاطع المستويات ٢س + ص - ع = -١، س + ص + ع - ٢ = صفر، ٣س - ص - ع = ٦

الأوضاع النسبية لمستويين في الفراغ

إذا كان $ط_1 : أ_1 س + ب_1 ص + جـ_1 ع + د_1 =$ صفر

، $ط_2 : أ_2 س + ب_2 ص + جـ_2 ع + د_2 =$ صفر

معادلتي مستويين مختلفين في الفراغ

فإن $\vec{n}_1 = (أ_1 ، ب_1 ، جـ_1)$ متجه اتجاه عمودي على المستوى $ط_1$

، $\vec{n}_2 = (أ_2 ، ب_2 ، جـ_2)$ متجه اتجاه عمودي على المستوى $ط_2$ ويكون المستويان $ط_1 ، ط_2$

① متقاطعين

وذلك عندما $ط_1 \cap ط_2 =$ ل ويمكن إيجاد قياس الزاوية بين المستويين وهو قياس الزاوية بين متجهي الاتجاه العموديين عليهما $(\vec{n}_1 ، \vec{n}_2)$

ويمكن إيجادها من العلاقة

$$جتا\ \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \, \|\vec{n}_2\|} \quad حيث\ 0 \le \theta \le 90$$

لاحظ أن في حالة أن $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 =$ صفر فإن $\theta = 90$ أي أن المستويين متعامدان

شرط تعامد مستويين

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 =$ صفر أي أن

$أ_1 أ_2 + ب_1 ب_2 + جـ_1 جـ_2 =$ صفر

② متوازيين

وذلك عندما $ط_1 \cap ط_2 = \phi$

وذلك يتحقق عندما

$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$

شرط توازي مستويين $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$

أي أن

① $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2}$ ② $\vec{n}_1 = ك\ \vec{n}_2$

③ $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$

ملاحظة: في المستويين $ط_1 ، ط_2$

① إذا كان

$\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2} \ne \frac{د_1}{د_2}$ فإن

المستويين متوازيان وغير منطبقين

② إذا كان $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2} = \frac{د_1}{د_2}$

فإن المستويين منطبقان

معادلة خط تقاطع مستويين:

إذا كان $ط_1 : أ_1 س + ب_1 ص + جـ_1 ع + د_1 =$ صفر

، $ط_2 : أ_2 س + ب_2 ص + جـ_2 ع + د_2 =$ صفر

معادلتي مستويين مختلفين في الفراغ

وكانت النسبة $\frac{أ_1}{أ_2} ، \frac{ب_1}{ب_2} ، \frac{جـ_1}{جـ_2}$

ليست جميعها متساوية فإن المستويين يتقاطعان ويمكننا إيجاد معادلة خط التقاطع بعدة طرق

•• طول العمود المرسوم من نقطة إلى مستوى

إذا كانت $أ(س_1 ، ص_1 ، ع_1) \notin$ المستوى ط حيث

$ط : أ س + ب ص + جـ ع + د = 0$

الذي فيه $\vec{n} = (أ ، ب ، جـ)$

متجه اتجاه عمودي ،

ب $(\text{س}_٢ ، \text{ص}_٢ ، \text{ع}_٢)$ أي نقطة تقع على المستوى ط . فإن طول العمود المرسوم من النقطة أ إلى المستوى ط ونرمز له بالرمز ل هو طول مسقط المتجه $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ في اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ن}}$

أي أن

$$\text{ل} = \frac{|\overrightarrow{\text{ب أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ن}}|}{\|\overrightarrow{\text{ن}}\|}$$

، ∵ $\overrightarrow{\text{ب أ}} = \text{أ} - \text{ب}$

$= (\text{س}_١ ، \text{ص}_١ ، \text{ع}_١) - (\text{س}_٢ ، \text{ص}_٢ ، \text{ع}_٢)$

$= (\text{س}_١ - \text{س}_٢ ، \text{ص}_١ - \text{ص}_٢ ، \text{ع}_١ - \text{ع}_٢)$

$$∴ \text{ل} = \frac{|(\text{س}_١ - \text{س}_٢ ، \text{ص}_١ - \text{ص}_٢ ، \text{ع}_١ - \text{ع}_٢) \cdot (\text{أ} ، \text{ب} ، \text{جـ})|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ + \text{جـ}^٢}}$$

$$∴ \text{ل} = \frac{|\text{أ}(\text{س}_١ - \text{س}_٢) + \text{ب}(\text{ص}_١ - \text{ص}_٢) + \text{جـ}(\text{ع}_١ - \text{ع}_٢)|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ + \text{جـ}^٢}}$$

$$∴ \text{ل} = \frac{|\text{أ س}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{جـ ع}_١ - (\text{أ س}_٢ + \text{ب ص}_٢ + \text{جـ ع}_٢)|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ + \text{جـ}^٢}}$$

، ∵ ب $(\text{س}_٢ ، \text{ص}_٢ ، \text{ع}_٢)$ ∈ المستوى ط

∴ $\text{أ س}_٢ + \text{ب ص}_٢ + \text{جـ ع}_٢ = -\text{د}$ (من معادلة المستوى)

$$∴ \text{ل} = \frac{|\text{أ س}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{جـ ع}_١ + \text{د}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ + \text{جـ}^٢}}$$

وتسمى الصورة الإحداثية لطول العمود المرسوم من نقطة إلى مستوى

•• المسافة بين مستويين متوازيين :

لإيجاد المسافة بين مستويين متوازيين في الفراغ نوجد نقطة تقع على أحدهما ونحسب طول العمود المرسوم من هذه النقطة إلى المستوى الآخر

ملاحظة هامة :

المستقيم المار بمركز كرة ومركز الدائرة الناتجة من تقاطع مستوى مع هذه الكرة يكون عمودياً على مستوى الدائرة

فمثلاً : اذا قطع مستوى كرة مركزها ن ونتج من تقاطعهما دائرة مركزها م فإن $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ يكون عمودياً على مستوى الدائرة م

- أمثلة محلولة -

① أوجد جيب تمام الزاوية بين كل زوج من المستويات الآتية :

① $٤\text{س} + ٤\text{ص} - ٢\text{ع} = ٩$ ، $٢\text{س} + \text{ص} + \text{ع} = -٣$

- الحل -

$\overrightarrow{\text{ن}_١} = (٤ ، ٤ ، -٢)$ ، $\overrightarrow{\text{ن}_٢} = (٢ ، ١ ، ١)$

$$∴ \text{جتا } \theta = \frac{|٨ + ٤ - ٢|}{\sqrt{١٦+١٦+٤}\ \sqrt{٤+١+١}} = \frac{٥\sqrt{٦}}{١٨}$$

② $\overrightarrow{\text{ر}} \cdot (٢ ، -١ ، ٢) = ٣$ ، $\overrightarrow{\text{ر}} \cdot (٣ ، ٢ ، -٦) = ٧$

- الحل -

$\overrightarrow{\text{ن}_١} = (٢ ، -١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{\text{ن}_٢} = (٣ ، ٢ ، -٦)$

$$∴ \text{جتا } \theta = \frac{|٦ - ٢ - ١٢|}{\sqrt{٤+١+٤}\ \sqrt{٩+٤+٣٦}} = \frac{٨}{٢١}$$

② أوجد قياس الزاوية بين كل زوج من المستويات الآتية:

① ٢س − ص + ع = ٥ ، ٣س + ٢ص − ٢ع = ١

- الحل -

ن١ = (٢، −١، ١) ، ن٢ = (٣، ٢، −٢)

∴ جتا θ = |٦ − ٢ − ٢| ÷ (√(٤+١+١) √(٩+٤+٤)) = ٢√١٠٢ ÷ ٥١

∴ θ = ٧٨° ٣٤َ ٤٢ً

② ر . (٢، ١، −١) = ٤ ، ر . (٣، −٢، ٠) = ٧

- الحل -

ن١ = (٢، ١، −١) ، ن٢ = (٣، −٢، ٠)

∴ جتا θ = |٦ − ٢ + صفر| ÷ (√(٤+١+١) √(٩+٤+٠)) = ٢√٧٨ ÷ ٣٩

∴ θ = ٦٣° ٤َ ١٠ً

③ عين قيمة كل من ك ، ل إذا كان كل زوج من المستويات التالية متوازيين

① ٢س − ص + ك ع = ٥ ، س + ل ص + ٤ع = ١

- الحل -

∵ المستويين متوازيين

∴ ٢/١ = −١/ل = ك/٤

∴ ل = −١/٢ ، ك = ٨

② ر . (−٢، ك، ٥ل) = −٢ ، ٥س + ٤ص + ٢٠ع = ٨

- الحل -

∵ المستويين متوازيين فإن

−٢/٥ = ك/٤ = ٥ل/٢٠

∴ ل = ك = −١٫٦

④ عين قيمة م التي يتعامد عندها كل زوج من المستويات الآتية:

① ٣س − ٤ص + ٢ع + ٩ = صفر ، ٣س + ٤ص − م ع + ٧ = صفر

- الحل -

∵ المستويين متعامدين

∴ (٣، −٤، ٢) . (٣، ٤، −م) = صفر

∴ ٩ − ١٦ − ٢م = صفر ∴ ٢م = −٧

∴ م = −٣٫٥

② (٣، −٥، م) . ر = ٣ ، س + ٣ص + ٢ع = −٥

- الحل -

∵ المستويين متعامدين

∴ (٣، −٥، م) . (١، ٣، ٢) = صفر

∴ ٣ − ١٥ + ٢م = صفر ∴ ٢م = ١٢

∴ م = ٦

⑤ حدد وضع كل من المستويين بالنسبة للآخر ٢س + ٣ص + ٤ع − ١٢ = صفر ، ٣س − ٦ص + ١ = صفر

- الحل -

∵ ٢/٣ ≠ ٣/−٦

∴ المستويان متقاطعان

ن١ . ن٢ = (٢، ٣، ٤) . (٣، −٦، ٠)

= ٦ − ١٨ + صفر = −١٢ ≠ صفر

∴ المستويان متقاطعان وغير متعامدين

⑥ أوجد معادلة خط التقاطع لكل زوج من المستويات الآتية:

① ٣س − ص + ٢ع = ٣ ، س − ٢ص + ٥ع = ٢

- الحل -

معادلتا المستويين هما

٣س − ص + ٢ع = ٣ ①

، س − ٢ص + ٥ع = ٢ ②

∵ ٣/١ ≠ −١/−٢

∴ المستويان متقاطعان

وبضرب المعادلة ① × −٢ والجمع إلى ②

∴ −٥س + ع = −٤

∴ ع = −٤ + ٥س ③

وبضرب المعادلة ② × −٣ والجمع إلى ①

∴ ٥ص − ١٣ع = −٣

∴ ع = (٥ص + ٣)/١٣ ④

من ③ ، ④

∴ الصورة الإحداثية لمعادلة خط التقاطع هي

−٤ + ٥س = (٥ص + ٣)/١٣ = ع

② ر . (٣ س − ص + ع) = ١ ، ر . (س + ٤ص − ٢ع) = ٢

- الحل -

معادلتا المستويين هما

ر . (٣س − ص + ع) = ١ ①

، ر . (س + ٤ص − ٢ع) = ٢ ②

∴ متجه اتجاه خط التقاطع

س	ص	ع
٣	−١	١
١	٤	−٢

= (−٢ ، ٧ ، ١٣)

وبوضع س = صفر في معادلتي المستويين

∴ (٠ ، ص ، ع) . (٣ ، −١ ، ١) = ١

∴ −ص + ع = ١ ③

، (٠ ، ص ، ع) . (١ ، ٤ ، −٢) = ٢

∴ ٤ص − ٢ع = ٢

∴ ٢ص − ع = ١ ④

وبجمع ③ ، ④

∴ ص = ٢ وبالتعويض في ③

∴ ع = ٣

∴ النقطة (٠ ، ٢ ، ٣) تقع على خط التقاطع

∴ الصورة الاتجاهية لمعادلة خط التقاطع هي

ر = (٠ ، ٢ ، ٣) + ك (−٢ ، ٧ ، ١٣)

⑦ اثبت أن المستويين

٣س − ص − ع = ٢ ، س − ٢ص + ٢ع = ١

متقاطعين وأوجد معادلة خط التقاطع

- الحل -

معادلتا المستويين هما

٣س − ص − ع = ٢ ①

، س − ٢ص + ٢ع = ١ ②

∵ ٣/١ ≠ −١/−٢

∴ المستويان متقاطعان

وبضرب المعادلة ① × ٢ والجمع إلى ②

∴ ٧س − ٤ص = ٥

∴ س = (٥ + ٤ص)/٧ ③

وبضرب المعادلة ① × −٢ والجمع إلى ②

∴ −٥س + ٤ع = −٣

∴ س = (٤ع + ٣)/٥ ④

من ③ ، ④

∴ الصورة الإحداثية لمعادلة خط التقاطع هي

س = (٥ + ٤ص)/٧ = (٤ع + ٣)/٥

⑧ اثبت أن خط تقاطع المستويين
س + ص − ع = صفر ، س − ص − ٥ع + ٧ = ٠
يوازي المستقيم الذي معادلته الاحداثية
$\frac{\text{س}+3}{3} = \frac{\text{ص}-1}{-2} = \frac{\text{ع}-5}{1}$

- الحل -

متجه اتجاه خط التقاطع = $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix}$

= (−٦ ، ٤ ، −٢)

، متجه اتجاه المستقيم المعطى
= (٣ ، −٢ ، ١)

، ∵ $\frac{-6}{3} = \frac{4}{-2} = \frac{-2}{1}$

∴ خط تقاطع المستويين يوازي المستقيم المعطى

⑨ أوجد معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين س + ص + ٢ع + ١ = صفر ، ٢س + ص − ع + ١ = صفر موازياً المستقيم الواصل بين النقطتين م١ (٢ ، ٥ ، −٣) ، م٢ (٣ ، −٢ ، ٢)

- الحل -

متجه اتجاه خط التقاطع = $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

= (−٣ ، ٥ ، −١)

، ∵ خط التقاطع يقع في المستوى المطلوب ∴ المتجه (−٣ ، ٥ ، −١) يوازي المستوى المطلوب

، ∵ م١م٢ = (٣ ، −٢ ، ٢) − (٢ ، ٥ ، −٣)
= (١ ، −٧ ، ٥) يوازي المستوى المطلوب

∴ متجه الاتجاه العمودي على المستوى المطلوب = $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ -3 & 5 & -1 \\ 1 & -7 & 5 \end{vmatrix}$

= (١٨ ، ١٤ ، ١٦)

وبوضع س = صفر في كل من معادلتي المستويين ∴ ص + ٢ع = −١ ، ص − ع = −١ وبحل المعادلتين معاً
∴ ص = −١ ، ع = صفر

∴ النقطة (٠ ، −١ ، ٠) تقع على خط التقاطع
∴ النقطة (٠ ، −١ ، ٠) تقع على المستوى المطلوب ، ∴ معادلة المستوى المطلوب هي
ر · (١٨ ، ١٤ ، ١٦) = (١٨ ، ١٤ ، ١٦) · (٠ ، −١ ، ٠)
∴ ١٨س + ١٤ص + ١٦ع = −١٤

⑩ أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (٢ ، −٣ ، ٢) ويحوي خط تقاطع المستويين ٦س + ٤ص + ٣ع + ٥ = صفر ، ٢س + ص + ع − ٢ = صفر

- الحل -

معادلة خط تقاطع المستويين
٦س + ٤ص + ٣ع = −٥ ①
، ٢س + ص + ع = ٢ ②
بضرب المعادلة ② × −٣ والجمع إلى ①
∴ ص = −١١ وبالتعويض في ①
∴ ٦س − ٤٤ + ٣ع = −٥
∴ ٢س = ١٣ − ع
∴ معادلة خط التقاطع هي
٢س = ١٣ − ع ، ص = −١١
∴ النقطة (٠ ، −١١ ، ١٣) تقع على خط التقاطع
والمتجه ($\frac{1}{2}$ ، ٠ ، −١) متجه اتجاه لخط التقاطع
∴ المتجه ($\frac{1}{2}$ ، ٠ ، −١) يوازي المستوى المطلوب
، ∵ المتجه (٠ ، −١١ ، ١٣) − (٢ ، −٣ ، ٢)
= (−٢ ، −٨ ، ١١) يقع في المستوى المطلوب

$\therefore$ متجه الاتجاه العمودي على المستوى المطلوب $= \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ \frac{1}{2} & صفر & -1 \\ -2 & -8 & 11 \end{vmatrix}$

$= (-8 ، \frac{-7}{2} ، -4)$

$\therefore$ معادلة المستوى المطلوب هي

$ن \cdot (-8 ، \frac{-7}{2} ، -4) = (2 ، -3 ، 2) \cdot (-8 ، \frac{-7}{2} ، -4)$

$\therefore -8س - \frac{7}{2}ص - 4ع = \frac{-27}{2}$ $\times -2$

$\therefore 8س + 7ص + 8ع = 27$

⑪ أوجد بعد كل من النقط أ(٣، ٥، ١)، ب(٧، -١، ٢)، ج(-٥، ٠، ٠) عن المستوى $س + 2ص - 2ع + 5 =$ صفر

- الحل -

بعد أ(٣، ٥، ١) عن المستوى

$= \frac{|3\times1 + 5\times2 - 1\times2 + 5|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{16}{3}$ وحدة طول

بعد ب(٧، -١، ٢) عن المستوى

$= \frac{|7\times1 + -1\times2 - 2\times2 + 5|}{\sqrt{1+4+4}} = 2$ وحدة طول

بعد ج(-٥، ٠، ٠) عن المستوى

$= \frac{|-5\times1 + 0\times2 - 0\times2 + 5|}{\sqrt{1+4+4}} =$ صفر

⑫ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (١، -١، ٣) على المستوى الذي معادلته $ن \cdot (2 ، 2 ، -1) = 5$

- الحل -

معادلة المستوى هي

$2س + 2ص - ع - 5 =$ صفر

$\therefore$ طول العمود $= \frac{|2\times1 + 2\times-1 - 1\times3 - 5|}{\sqrt{4+4+1}}$

$= \frac{8}{3}$ وحدة طول

⑬ اذا كان طول العمود المرسوم من النقطة أ(٠، -١، ٢) على المستوى $\sqrt{2}س + ص - ع + ل =$ صفر يساوي ٢ وحدة طول أوجد قيمة ل

- الحل -

$\therefore \frac{|\sqrt{2}\times0 + 1\times-1 - 1\times2 + ل|}{\sqrt{2+1+1}} = 2$

$\therefore |ل - 3| = 4$ $\therefore ل - 3 = \pm 4$

$\therefore ل = 7$ ، $ل = -1$

⑭ كرة مركزها (١، ٢، ١) تمس سطح المستوى $س + ص + ع = 1$ أوجد معادلة الكرة

- الحل -

نق للكرة = طول العمود المرسوم من مركزها إلى المستوى

$\therefore نق = \frac{|1\times1 + 1\times2 + 1\times1 - 1|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3}$ وحدة طول

$\therefore$ معادلة الكرة هي

$(س - 1)^2 + (ص - 2)^2 + (ع - 1)^2 = 3$

⑮ أوجد النقطة التي تقع على المحور س والمتساوية البعد عن كل من المستويين $12س - 16ص + 15ع + 1 =$ صفر ، $2س + 2ص - ع - 1 =$ صفر

- الحل -

نفرض النقطة هـ(م ، ٠ ، ٠)

$$\therefore \frac{|١٢م+١|}{\sqrt{١٤٤+٢٥٦+٢٢٥}} = \frac{|٢م-١|}{\sqrt{٤+٤+١}}$$

∴ ٣ |١٢م+١| = ٢٥ |٢م-١|

∴ ٣(١٢م+١) = ± ٢٥(٢م-١)

∴ ٣(١٢م+١) = ٢٥(٢م-١)

∴ ٣٦م+٣ = ٥٠م-٢٥

∴ ١٤م = ٢٨ ∴ م = ٢

، ٣(١٢م+١) = -٢٥(٢م-١)

∴ ٣٦م+٣ = -٥٠م+٢٥

∴ ٨٦م = ٢٢ ∴ م = $\frac{١١}{٤٣}$

∴ النقطة هـ (٢ ، ٠ ، ٠) ، ($\frac{١١}{٤٣}$ ، ٠ ، ٠)

(١٦) أوجد معادلة المستوى الموازي للمستوى ٢س+ص-٤ع+٥ = صفر والذي على بعد $\sqrt{٢١}$ وحدة طول من النقطة (١ ، ٢ ، صفر)

- الحل -

∵ المستوى المطلوب يوازي المستوى ٢س+ص-٤ع+٥ = صفر

∴ معادلته هي ٢س+ص-٤ع+د = صفر

، ∵ طول العمود من النقطة (١ ، ٢ ، ٠) علي المستوى = $\sqrt{٢١}$

$$\therefore \frac{|٢\times١+١\times٢-٤\times٠+د|}{\sqrt{٤+١+١٦}} = \sqrt{٢١}$$

∴ |٤+د| = ٢١ ∴ ٤+د = ± ٢١

∴ ٤+د = ٢١ ∴ د = ١٧

أو ٤+د = -٢١ ∴ د = -٢٥

∴ معادلة المستوى هي

٢س+ص-٤ع+١٧ = صفر

، ٢س+ص-٤ع-٢٥ = صفر

(١٧) احسب بعد النقطة (-١ ، ١ ، -٢) عن المستوى المار بالثلاث نقاط م١(١ ، -١ ، ١) ، م٢(-٢ ، ١ ، ٣) ، م٣(٤ ، -٥ ، -٢)

- الحل -

$\overrightarrow{م_١م_٢}$ = (-٣ ، ٢ ، ٢)

، $\overrightarrow{م_٢م_٣}$ = (٦ ، -٦ ، -٥)

∴ متجه الاتجاه العمودي على المستوى =

$$\begin{vmatrix} \hat{س} & \hat{ص} & \hat{ع} \\ -٣ & ٢ & ٢ \\ ٦ & -٦ & -٥ \end{vmatrix}$$

= (٢ ، -٣ ، ٦)

∴ معادلة المستوى المطلوب هي

ر · (٢ ، -٣ ، ٦) = (١ ، -١ ، ١) · (٢ ، -٣ ، ٦)

∴ ٢س-٣ص+٦ع-١١ = صفر

$$\therefore \text{طول العمود} = \frac{|٢\times-١-٣\times١+٦\times-٢-١١|}{\sqrt{٤+٩+٣٦}}$$

= ٤ وحدة طول

(١٨) أوجد البعد بين المستويين المتوازيين س-٢ص+٢ع = ١ ، ٢س-٤ص+٤ع = ٣

- الحل -

$$\because \frac{١}{٢} = \frac{-٢}{-٤} = \frac{٢}{٤} \neq \frac{١}{٣}$$

∴ المستويان متوازيان وغير منطبقين

∴ نوجد نقطة ∈ للمستوى الأول وذلك

بفرض أن س = صفر ، ص = صفر

∴ ع = $\frac{١}{٢}$

∴ النقطة (٠ ، ٠ ، $\frac{١}{٢}$) ∈ للمستوى الأول

∴ المسافة بين المستويين

$= \frac{|2\times صفر - 4\times صفر + 4\times \frac{1}{2} - 3|}{\sqrt{4+16+16}}$

$= \frac{1}{6}$ وحدة طول

(19) اثبت أن المستويين المتوازيين

ط₁ : أ س + ب ص + جـ ع + د₁ = صفر

، ط₂ : أ س + ب ص + جـ ع + د₂ = صفر

يكون البعد بينهما $\frac{|د_2 - د_1|}{\sqrt{أ^2+ب^2+جـ^2}}$

- الحل -

نفرض أن (س₁ ، ص₁ ، ع₁) ∈ المستوى ط₁

∴ المسافة بين المستويين = طول العمود المرسوم من (س₁ ، ص₁ ، ع₁) إلى المستوى ط₂

∴ المسافة بين المستويين

$= \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ ع_1 + د_2|}{\sqrt{أ^2+ب^2+جـ^2}}$

، من معادلة المستوى الأول

∴ أ س₁ + ب ص₁ + جـ ع₁ = − د₁

∴ المسافة بين المستويين

$= \frac{|د_2 - د_1|}{\sqrt{أ^2+ب^2+جـ^2}}$ وحدة طول

(20) أوجد المسافة بين المستقيم ر = (2 ، −2 ، 3) + ل (1 ، −1 ، 4)

والمستوى ر • (1 ، 5 ، 1) = 5

- الحل -

∵ (1 ، −1 ، 4) متجه اتجاه المستقيم

، (1 ، 5 ، 1) متجه اتجاه عمودي على المستوى

، ∵ (1 ، −1 ، 4) • (1 ، 5 ، 1) = 1 − 5 + 4 = صفر

∴ المستقيم يوازي المستوى

∴ البعد بين المستقيم والمستوى

= طول العمود من (2 ، −2 ، 3) إلى المستوى

$= \frac{|2 + 5\times -2 + 3 - 5|}{\sqrt{1+25+1}} = \frac{10}{3\sqrt{3}}$ وحدة طول

(21) إذا كانت النقط أ ، ب ، جـ ، د في الفراغ متجهاتٌ موضعها بالنسبة لنقطة الأصل هي

− ص + ع ، 2 س − ص + 3 ع ، − س − 2 ص + 2 ع ، 7 س − 4 ص + 2 ع على الترتيب

(1) أوجد متجه الاتجاه العمودي على المستوى أ ب جـ

(2) بين أن طول العمود المرسوم من د على مستوى أ ب جـ يساوي $2\sqrt{6}$

(3) بين أن المستويين أ ب جـ ، د ب جـ متعامدان

(4) أوجد معادلة خط تقاطع المستويين أ ب جـ ، و د ب

- الحل -

(1) أب = ب − أ = (2 ، −1 ، 3) − (0 ، −1 ، 1) = (2 ، 0 ، 2)

، ب جـ = جـ − ب = (−1 ، −2 ، 2) − (2 ، −1 ، 3) = (−3 ، −1 ، −1)

∴ متجه الاتجاه العمودي على المستوى أ ب جـ

$= أب \times ب جـ = \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

= 2 س − 4 ص − 2 ع

② معادلة المستوى أ ب جـ هـ

ر̅ • (٢، -٤، -٢) = (٠، -١، ١) • (٢، -٤، -٢)

∴ ٢س - ٤ص - ٢ع - ٢ = صفر

∴ طول العمود من د

= |٢×٧ - ٤×-٤ - ٢×-٢ - ٢| ÷ √(٤+١٦+٤) = ٢√٦ وحدة طول

③ ب د = (٧، -٤، ٢) - (٢، -١، ٣)

= (٥، -٣، -١)

∴ متجه الاتجاه العمودي على المستوى ب جـ د

= ب د × ب جـ =
س	ص	ع
٥	-٣	-١
-٣	-١	-١

= (٢، ٨، -١٤)

∵ (متجه الاتجاه العمودي على المستوى أ ب جـ) • (متجه الاتجاه العمودي على المستوى ب جـ د)

= (٢، -٤، -٢) • (٢، ٨، -١٤) = صفر

∴ المستويان متعامدان

④ متجه الاتجاه العمودي على المستوى و د ب

= و د × و ب =
س	ص	ع
٧	-٤	٢
٢	-١	٣

= (-١٠، -١٧، ١)

∵ متجه الاتجاه العمودي للمستوى أ ب جـ = (٢، -٤، -٢)

∴ متجه اتجاه خط التقاطع

= (٢، -٤، -٢) × (-١٠، -١٧، ١)

=
س	ص	ع
٢	-٤	-٢
-١٠	-١٧	١

= (-٣٨، ١٨، -٧٤)

∵ ب ∈ للمستويين

∴ معادلة خط التقاطع هـ

ر̅ = (٢، -١، ٣) + ك(-٣٨، ١٨، -٧٤)

㉒ اذا قطع المستوى ٢س - ص - ٢ع + ١٢ = ٠ الكرة (س+٣)² + (ص+٢)² + (ع-١)² = ١٥ أوجد مساحة المقطع الناتج

- الحل -

مركز الكرة هو

ن = (-٣، -٢، ١)

وطول نصف قطرها

أ ن = √١٥

∵ م ن = |٢×-٣ - ١×-٢ - ٢×١ + ١٢| ÷ √(٤+١+٤)

∴ م ن = ٢ وحدة طول

∴ نق = √(١٥ - ٤) = √١١ وحدة طول

∴ مساحة المقطع الناتج = ط نق² = ١١ ط وحدة مربعة

- تمارين عامة -

① أوجد جيب تمام الزاوية بين كل زوج من المستويات الآتية

ر · (٢ ، -١ ، ٤) = ٥ ،

٣س - ص + ٢ع = ٤

② أوجد قياس الزاوية بين كل زوج من المستويات الآتية

① ص = ٤ ، س - ٣ص + ٥ع = ١

② س - ٣ص + ٢ع = صفر ،

٢س + ص - ع = ٣

③ عين قيمة كل من ك ، ل إذا كان كل زوج من المستويات التالية متوازيين

٣س - ك ص + ٥ع - ٤ = صفر

، ٦س + ل ع = ٧

④ عين قيمة م التي تتعامد عندها كل زوج من المستويات الآتية:

① س - ٣ص + ع = ٤ ،

م س + ٢ص + ٣ع = ٢

② ٧س - ٢ص - ٧ = صفر ،

(م ، ١ ، -٣) · ر = صفر

⑤ أوجد معادلة خط التقاطع لكل زوج من المستويات الآتية

س + ٢ص - ٢ع = ١ ،

٢س + ص - ٣ع = ٥

⑥ أوجد معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين س + ٢ص + ٣ع - ٤ = صفر ، ٢س + ص - ع + ٨ = صفر وعمودياً على المستوى ٣س + ٢ص + ع + ٦ = صفر

⑦ أوجد بعد النقطة (٣ ، -٥ ، ٢) عن المستوى ٨س - ٢ص + ع = ٥

⑧ أوجد بعد النقطة (٢ ، ١ ، -١) عن المستوى ر · (سَ - ٢صَ + ٤عَ) = ٩

⑨ اثبت أن المستويين ٢س + ص + ٢ع = ٨ ، ٤س + ٢ص + ٤ع + ٥ = صفر متوازيان وأوجد البعد بينهما

⑩ إذا كان المستوى س يحوى النقط أ(١ ، ٤ ، ٢) ، ب(١ ، ٠ ، ٥) ، جـ(٠ ، ٨ ، -١) وكان المستوى ص يحوى النقطة د(٢ ، ٢ ، ٣) والمتجه ن = سَ + ٢صَ + ٢عَ عمودي عليه أوجد

① المعادلة الإحداثية للمستوى س

② المعادلة الإحداثية للمستوى ص

③ إذا كانت النقطة (ط ، ١ ، ف) تقع في كل من المستويين س ، ص فما قيمة كل من ط ، ف

④ أوجد الصورة المتجهة لخط تقاطع المستويين س ، ص

⑤ إذا كانت النقطة (١ ، ١ ، م) على أبعاد متساوية من المستويين س ، ص أوجد قيم م الممكنة

⑪ أوجد طول نصف قطر السطح الدائري الناتج من تقاطع الكرة $س^2 + ص^2 + ع^2$ - ٢ص - ٤ع = ١١ والمستوى س + ٢ص + ٢ع = ١٥